Corso di Geometria analitica e algebra lineare

Appello del 2/7/2015

La durata della prova è di 3 ore.

Esercizio 1.

Al variare di $\beta, h \in \mathbb{R}$ si considerino il sottospazio $Z_\beta = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+\beta t = 0\}$ e l'applicazione lineare $f_h \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f_h(x, y, z) = (-2hx + 3y - (2h+1)z, 2hx + h(h+1)y + 2hz, hx + hz, hx + 3y + (h-1)z).$$

(a) Si determinino i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathbb{R}$ per cui si ha $\mathbb{R}^4 = Z_\beta \oplus \operatorname{Im} f_h$.

(b) Si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui esiste un'applicazione lineare surgettiva $g \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g \circ f_h = 0$ e $g(1, 2, 1, 4) = (3, 1)$.

Esercizio 2.

(a) Sia f un endomorfismo di $\mathbb{C}^6$ con polinomio minimo $m(t) = (t^2+1)^2$.

  (i) Si determinino tutte le possibili forme di Jordan di f.

  (ii) Sia W un sottospazio vettoriale f-invariante di $\mathbb{C}^6$ tale che $(f|_W)^4 + (f|_W)^2 = 0$. Si provi che $f|_W$ è diagonalizzabile.

(b) Sia $A \in M(6, \mathbb{R})$ una matrice reale con polinomio minimo $m(t) = (t^2+1)^2$. Si determinino tutte le possibili forme di Jordan reale di A.

(c) Siano $A, B \in M(6, \mathbb{R})$ matrici aventi lo stesso polinomio minimo e tali che $(A^2+I)^2 = (B^2+I)^2 = 0$. Si dica se A e B sono simili.

Esercizio 3.

Sia $V = \mathbb{R}_k[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado $\leq k$. Per ogni $A \in M(n, \mathbb{R})$ si consideri l'applicazione bilineare $\psi_A \colon V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$\psi_A(p, q) = \operatorname{tr}(p(A)q(A)) \quad \forall p, q \in V$$

dove tr denota l'applicazione "traccia".

(a) Si verifichi che ψ_A è un prodotto scalare su V.

(b) Si verifichi che, se $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ sono matrici simili, allora $\psi_A = \psi_B$.

(c) Denotati con $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ gli autovalori distinti di una matrice triangolabile $A \in M(n, \mathbb{R})$, si provi che se $r > k$, allora ψ_A è definito positivo.

(d) Denotati con $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ gli autovalori distinti di una matrice triangolabile $A \in M(n, \mathbb{R})$, si determini la segnatura di ψ_A.

Esercizio 4.

Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

(a) Sia $r = \{(0, t, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$. Esiste una retta $s \neq r$ di $\mathbb{R}^3$ tale che il luogo dei punti di $\mathbb{R}^3$ equidistanti da r e da s è una quadrica $\mathcal{C}$ di rango 2: se l'asserzione è vera si forniscano equazioni esplicite per s e per $\mathcal{C}$.

(N.B.: per rango di una quadrica di equazione ${}^t\widetilde{X}Q\widetilde{X} = 0$ si intende il rango della matrice $Q \in M(4, \mathbb{R})$)

(b) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e sia Φ un prodotto scalare non degenere su V. Se $f \in O(V, \Phi)$ e λ è un autovalore reale di f, allora $|\lambda| = 1$.