A. A. 2008/2009
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Compito del 15/1/2010

Esercizio 1
Fissata $A \in {}_2\mathbb{R}_2$ si consideri il prodotto scalare φ_A su ${}_2\mathbb{R}_2$ dato da
$$\varphi_A(X,Y) = \mathrm{tr}(A(XY+YX)), \text{per ogni } X,Y \in {}_2\mathbb{R}_2.$$
1) Dimostrare che se A è simile a B allora φ_A è congruente a φ_B.
2) Discutere, al variare di A tra le matrici simmetriche, la segnatura di φ_A.
3) Per $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ determinare una decomposizione di Witt per φ_A.

Esercizio 2
Sia $p(x) = (x-1)^4(x-2)^2 \in \mathbb{C}[x]$.
Determinare tutte le possibili forme canoniche di Jordan per un endomorfismo f di $\mathbb{C}^4$ per cui p appartenga all'ideale di f, $\dim\mathrm{Ker}(f-2id) = 2$ e tale che i sottospazi di $\mathbb{C}^4$ di dimensione 3 f-invarianti che non contengono $\mathrm{Ker}(f-2id)$ siano in numero finito.

Esercizio 3
Sia $P_1 \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme formato dai segmenti di estremi $(-1,-1)$ e $(3,-1)$, $(3,-1)$ e $(3,0)$, $(3,0)$ e $(-1,0)$, $(-1,0)$ e $(-1,-1)$ e $(-1,0)$ e $(-7,2)$. Sia $P_2 \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme formato dai segmenti di estremi $(0,0)$ e $(4,2)$, $(4,2)$ e $(5,4)$, $(5,4)$ e $(1,2)$, $(1,2)$ e $(0,0)$ e $(1,2)$ e (a,b), con $a,b \in \mathbb{R}$.
Determinare i valori di a e b per cui P_1 e P_2 sono affinemente equivalenti.

Durata: 3 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.