CORSO di LAUREA in FISICA – GEOMETRIA I
Compito del 15/9/2010, A. A. 2009/2010

Esercizio 1

Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} ax + bz = a - 1 \\ y + (a-2)z + (b+1)t = 0 \\ y - z + (2b-1)t = b - 2 \\ ax + y + (a+b-2)z + (a+b)t = a - 1 \end{cases}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ dire se il sistema ha soluzioni $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ e se la soluzione è unica.

(b) Nei casi in cui l'insieme S delle soluzioni del sistema è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, determinare una base di S e completarla a una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 2

Sia $M \in M(3, \mathbb{R})$ una matrice fissata e sia $f\colon M(3, \mathbb{R}) \to M(3, \mathbb{R})$ l'applicazione definita da $f(X) = MX - {}^tX{}^tM$.

(a) Verificare che f è lineare e che $\operatorname{Im} f \subseteq A(3, \mathbb{R}) = \{Y \in M(3, \mathbb{R}) \mid {}^tY = -Y\}$.

(b) Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e sia $g\colon A(3, \mathbb{R}) \to A(3, \mathbb{R})$ la restrizione di f a $A(3, \mathbb{R})$; dire se g è diagonalizzabile.

Esercizio 3

Sia $n \geq 1$ un intero, sia $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ e sia $W(f)$ l'insieme dei prodotti scalari b su $\mathbb{R}^n$ tali che

$$b(f(x), f(y)) = b(x, y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Verificare che $W(f)$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $S(n)$ dei prodotti scalari su $\mathbb{R}^n$.

(b) Provare che, se f non è iniettiva, ogni $b \in W(f)$ è degenere.

(c) Sia λ un autovalore per f e sia V_λ il corrispondente autospazio; provare che, se $\lambda \neq \pm 1$ e $b \in W(f)$, allora $b|_{V_\lambda} = 0$.

(d) Calcolare $\dim W(f)$ nel caso in cui $n = 3$ e $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ abbia autovalori $1, 2, 3$.

(e) Calcolare $\dim W(f)$ nel caso in cui $n \geq 1$ e $f^2 = \mathrm{Id}$.

Durata: 2:30 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.