A. A. 2009/2010 CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I Compito dell'8/2/2010

Esercizio 1
Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione $L_a \colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definita da

$$L_a(p(x)) = x^3\, p\left(\frac{a}{x}\right) \qquad \forall p(x) \in \mathbb{R}_3[x].$$

(a) Verificare che L_a è lineare.
(b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo L_a è diagonalizzabile.
(c) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ il sottospazio vettoriale $W = \mathrm{Span}(1 - x^2, x - x^3) \subset \mathbb{R}_3[x]$ è L_a-invariante.

Esercizio 2
Sia $F = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \mid A^2 = I\}$.

(a) Dire se F è un sottospazio vettoriale di $M(2, \mathbb{R})$.
(b) Dire quante sono le classi di equivalenza distinte rispetto alla relazione di SD-equivalenza su F.
(c) Dire quante sono le classi di equivalenza distinte rispetto alla relazione di similitudine su F.
(d) Se $S(2) = \{B \in M(2, \mathbb{R}) \mid {}^tB = B\}$, dire quante sono le classi di equivalenza distinte rispetto alla relazione di congruenza su $F \cap S(2)$.

Esercizio 3
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4.

(a) Sia W un sottospazio vettoriale di V di dimensione 3 e sia ψ un prodotto scalare su V di rango 3. Provare che

$$\dim(W^\perp) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad V^\perp \not\subseteq W.$$

(b) Fissati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y = 0,\ y - z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0\}$, costruire un prodotto scalare ψ su $\mathbb{R}^4$ tale che

$$i_+(\psi) = 2, \quad i_-(\psi) = 1 \ \text{ e } \ W^\perp = H$$

(dove $i_+(\psi)$ e $i_-(\psi)$ denotano rispettivamente l'indice di positività e l'indice di negatività di ψ).

Durata: 2:30 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.