CORSO di LAUREA in FISICA – GEOMETRIA I
Compito del 5/7/2010, A. A. 2009/2010

Esercizio 1

(a) Sia $Z = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0,\ x - z - 2t = 0\}$. Costruire un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che $Z = \operatorname{Im} f$ e $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

(b) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$ e sia $f \colon V \to V$ un endomorfismo di rango p tale che $\ker f \cap \operatorname{Im f} = \{0\}$:

(b1) mostrare che esiste un sottospazio W di V tale che $\dim W = p$ e per ogni intero $k > 0$ l'applicazione lineare $f^k|_W$ è iniettiva;

(b2) determinare per quali r esiste un sottospazio Z di V di dimensione r tale che per ogni intero $k > 0$ l'applicazione lineare $f^k|_Z$ è iniettiva.

Esercizio 2

Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha-3 & 3-\alpha \\ 0 & 2 & 3-\alpha & \alpha-3 \\ 0 & 0 & \alpha+2 & \alpha-2 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & \alpha+2 \end{pmatrix}.$$

(a) Dire per quali valori di α la matrice A_α è simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Dire per quali valori di α la matrice A_α è congruente a una matrice diagonale.

Esercizio 3

Sia $S \in M(2, \mathbb{R})$ una matrice tale che ${}^tS = S$ e sia $b_S \colon M(2, \mathbb{R}) \times M(2, R) \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare definita da $b_S(X, Y) = \operatorname{Tr}({}^tXSY)$.

(a) Verificare che b_S è un prodotto scalare;

(b) fissata $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, determinare una base ortogonale A_1, A_2, A_3, A_4 di $M(2, \mathbb{R})$ tale che $\operatorname{Span}(A_1, A_2)$ sia il sottospazio delle matrici diagonali.

Durata: 2:30 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.