A. A. 2008/2009 CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I Compito del 10/6/2009

Esercizio 1
Sia V uno spazio vettoriale, $f : V \to V$ un endomorfismo e siano h, k due numeri interi positivi.

a) Provare che $\ker f^h \cap \operatorname{Im} f^k = f^k(\ker f^{h+k})$.

b) Provare che, se $f^k(\ker f^{h+k}) = \{0\}$ e $h \geq k$, allora $V = \ker f^h \oplus \operatorname{Im} f^k$.

c) Esibire un esempio di un endomorfismo f di V in cui

$$\dim V = 4, \quad \dim \ker f = 1 \quad \text{e} \quad V = \ker f^2 \oplus \operatorname{Im} f^2.$$

Esercizio 2
Si considerino le seguenti matrici in $M(4, \mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Dire quali delle precedenti matrici sono simili e quali non lo sono, motivando adeguatamente la risposta.

Esercizio 3
Sia $V = \mathbb{R}_k[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado $\leq k$. Se A è una matrice in $M(n, R)$ e $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0 \in V$, poniamo $p(A) = a_k A^k + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$ dove I_n denota la matrice identica in $M(n, R)$.

Per ogni $A \in M(n, R)$ si consideri l'applicazione $\psi_A \colon V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$\psi_A(p, q) = \operatorname{tr}(p(A)q(A)) \quad \forall p, q \in V$$

dove "tr" denota l'applicazione "traccia".

a) Verificare che ψ_A è un prodotto scalare su V.

b) Verificare che, se $A, B \in M(n, R)$ sono matrici simili, allora $\psi_A = \psi_B$.

c) Provare che, se A ha n autovalori distinti e $n > k$, allora ψ_A è definito positivo.

Durata: 3 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.

A. A. 2008/2009 CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II Compito del 10/6/2009

Esercizio 1
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, $f : V \to V$ un endomorfismo e $\lambda \in$Spettro(f). Sia $g = f - \lambda id$ e sia $q \in \mathbb{C}[x]$ il polinomio minimo di f. Supponiamo che esistano h, k due numeri interi positivi tali che $\ker g^h \cap \operatorname{Im} g^k = \{0\}$.
1) Dimostrare che $q = (x - \lambda)^r Q(x)$ con $Q(\lambda) \neq 0$ e $r \leq k$.
2) Dimostrare che, se $\ker g^h \cap \operatorname{Im} g^{k-1} \neq \{0\}$, allora $r = k$.

Esercizio 2
Sia φ_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0, 1$, il prodotto scalare non degenere su $\mathbb{R}^4$ definito da $\varphi_\alpha(X, Y) = {}^tXA_\alpha Y$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^4$, dove

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 2-\alpha & -2-\alpha & \alpha \\ 2-\alpha & 3\alpha+4 & 4\alpha-2 & \alpha+2 \\ -2-\alpha & 4\alpha-2 & 5\alpha+1 & 2-\alpha \\ \alpha & \alpha+2 & 2-\alpha & -2 \end{pmatrix}$$

e siano $Z_1, Z_2, Z_3 \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi di equazioni $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ y = z = 0\}$, $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ x - y - 2z = t = 0\}$, $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ x + y - z = 2y + z = 0\}$, rispettivamente.
1) Determinare per quali α le tre restrizioni di φ_α ai tre sottospazi Z_1, Z_2, Z_3 sono isometriche tra di loro.
2) Per i valori di α che verificano 1), è vero che l'indice di Witt di φ_α non varia?

Esercizio 3
Sia E uno spazio affine di dimensione n. Dato un sottospazio affine $F \subset E$ definiamo codim$F$ = $n-$dim$F$ (dove poniamo $\dim \emptyset = -\infty$ e $\operatorname{codim} \emptyset = +\infty$).
Dati $A, B \subset E$ sottospazi affini, dimostratre che $\operatorname{codim}(A \cap B) = \operatorname{codim} A + \operatorname{codim} B$ se e solo se per ogni $\rho, \tau : E \to E$ traslazioni, $\dim(A \cap B) = \dim(\rho A \cap \tau B)$.

Durata: 3 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.