A. A. 2008/2009
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I
Compito del 7/7/2009

Esercizio 1
Sia
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ di autovettori per A o, qualora ciò non fosse possibile, una base di $\mathbb{R}^4$ a bandiera per A.

Esercizio 2
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di un prodotto scalare φ non degenere; sia $f : V \to V$ una applicazione tale che ψ_f è un prodotto scalare, dove $\psi_f : V \times V \to \mathbb{K}$ è definita da $\psi_f(v, w) = \varphi(v, f(w))$ per ogni $v, w \in V$.

1) Provare che f è lineare e che, se φ è definito positivo, allora f è un'applicazione simmetrica (rispetto a φ).
2) Provare che f è iniettiva se e solo se ψ_f è non degenere.
3) Dimostrare che non esistono o costruire, se esistono, φ e f tali che il rango di f sia 1 e il rango di ψ_f sia 2.
4) Nel caso in cui $V = \mathbb{R}^3$ e φ è il prodotto scalare standard, dimostrare che non esiste o costruire, se esiste, f tale che l'ortogonale rispetto a ψ_f del sottospazio $\mathrm{Span}((1, 0, 0), (1, 1, 0))$ sia il sottospazio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 2y - z = 0\}$.

Esercizio 3
Per ognuna delle affermazioni seguenti, dire se è vera o falsa motivando la risposta.

1) Siano V, W spazi vettoriali di dimensione finita e $f : V \to W$ lineare. Sia $Z \subseteq V$ un sottospazio. Allora $\dim f(Z) \geq \dim Z - \dim \operatorname{Ker} f$.
2) Siano F, G, H spazi vettoriali di dimensione finita e $f : F \to G$, $h : H \to G$ lineari. Allora esiste $L : H \to F$ lineare tale che $h = f \circ L$ se e solo se $\operatorname{Im} h \subseteq \operatorname{Im} f$.
3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione maggiore o uguale a 2. Allora l'insieme $E = \{f \in \operatorname{End}(V) |\ f \circ f = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\operatorname{End}(V)$.

Durata: 3 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.

A. A. 2008/2009
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Compito del 7/7/2009

Esercizio 1
Sia V uno spazio vettoriale, φ un prodotto scalare su V e $W \subset V$ un sottospazio.
1) È vero che, se φ è non degenere e $V = W \oplus W^{\perp}$ allora $\varphi_{|_W}$ e $\varphi_{|_{W^{\perp}}}$ sono non degeneri?
2) È vero che, se φ è non degenere e $V = W \oplus W^{\perp}$ allora $\mathrm{witt}(\varphi) = \mathrm{witt}(\varphi_{|_W}) + \mathrm{witt}(\varphi_{|_{W^{\perp}}})$?
(dove con witt si è indicato l'indice di Witt di un prodotto scalare)
3) Dimostrare che, se φ è non degenere e $\varphi_{|_W} = 0$ allora esiste un sottospazio $W' \subset V$ di dimensione $\dim W' = \mathrm{witt}(\varphi)$, che contiene W e tale che $\varphi_{|_{W'}} = 0$.

Esercizio 2
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione n, sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo e poniamo $C_f = \{g \in \mathrm{End}(V) |\ f \circ g = g \circ f\}$.
1) Dimostrare che, se $g \in C_f$, allora per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$, $\ker(f - \lambda id)^k$ è g-invariante.
2) Dimostrare che C_f è un sotospazio di $\mathrm{End}(V)$.
3) Nel caso in cui il polinomio minimo di f sia $\mu_f = (x-a)^n$ per qualche $a \in \mathbb{C}$, dimostrare che $\dim C_f = n$.
4) nelle stesse ipotesi del punto 3), dimostrare che $C_f = \mathrm{Span}\{f^h |\ h \in \mathbb{N}\}$.

Esercizio 3
Siano C_1, C_2, C_3 le coniche di $\mathbb{R}^2$ definite rispettivamente dalle equazioni:
$4x^2+y^2+2xy-2x-2y-1=0$, $2x^2+2y^2-2xy+4x-2y-3=0$, $3x^2+2y^2+4xy+2x-2y+5=0$.
1) Quali tra C_1, C_2 e C_3 sono affinemente equivalenti?
2) Quali tra C_1, C_2 e C_3 sono isometricamente equivalenti?

Durata: 3 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.