A. A. 2008/2009 CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I Compito del 5/2/2009

Esercizio 1
In $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottospazi

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}, \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - z = 0\},$$

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0\}.$$

(a) Costruire un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(V) = V$, $f(W) = Z$ e $f(Z) = W$.
(b) Dire se l'endomorfismo f costruito nel punto (a) è diagonalizzabile.

Esercizio 2
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia W un sottospazio vettoriale di V di dimensione k. Sia ϕ un prodotto scalare non degenere su V e sia

$$E = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid \phi(f(x), y) = \phi(x, f(y)) \quad \forall x, y \in V\}.$$

(a) Verificare che E è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(V)$ e calcolarne la dimensione.
(b) Nel caso in cui ϕ è definito positivo, si calcoli la dimensione del sottospazio vettoriale

$$G = \{f \in E \mid f(W) \subseteq W\}.$$

Esercizio 3
Su $\mathbb{R}^4$ si consideri il prodotto scalare ϕ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Si determinino tutte le segnature di $\phi|_W$ al variare di W tra i sottospazi 3-dimensionali di $\mathbb{R}^4$ (se una segnatura è possibile, esibire un sottospazio W che la realizza; se non è possibile, dimostrarlo).

Durata compito: 3 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.

A. A. 2008/2009 CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II Compito del 5/2/2009

Esercizio 1
Per $a, b \in \mathbb{R}$ si consideri il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ dato da $\varphi_{a,b}(X, Y) = {}^tXM_{a,b}Y$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^3$, dove

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & a \\ b & a & b \end{pmatrix}.$$

1) È vero che, per i valori di (a, b) per cui $\varphi_{a,b}$ è non degenere, l'indice di Witt di $\varphi_{a,b}$ è costante?
2) Esistono valori di (a, b) per cui l'indice di Witt di $\varphi_{a,b}$ è 2?
3) Per quali valori di (a, b), $\varphi_{a,b}$ è non degenere e il vettore $(1, 0, 0)$ fa parte della componente totalmente anisotropa di una decomposizione di Witt di $\mathbb{R}^3$?
4) Per quali valori di (a, b), il funzionale $\mu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato da $\mu(x, y, z) = x + y + z$ è rappresentabile tramite $\varphi_{a,b}$?

Esercizio 2
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$, sia $f \in$End(V) un endomorfismo e sia $I = I(f)$ il suo ideale. Dati due polimoni $p, q \in \mathbb{K}[t]$, sia $m \in \mathbb{K}[t]$ il loro massimo comun divisore.
Dimostrare che:
1) $m = 1$ e $pq \in I \Rightarrow V = \mathrm{Im}(p(f)) \oplus \mathrm{Im}(q(f))$.
2) $\mathrm{Ker}(p(f)) \oplus \mathrm{Ker}(q(f)) = V \Rightarrow m(f)$ è un isomorfismo e $pq \in I$.
3) $\dim(\mathrm{Ker}(p(f)) + \mathrm{Ker}(q(f))) = \dim V - \dim(\mathrm{Im}(p(f)) \cap \mathrm{Im}(q(f)))$. (hint: può essere utile confrontare immagine e nucleo di $m(f)$ con intersezioni e somme dei nuclei e delle immagini di $p(f)$ e $q(f)$.)

Esercizio 3
Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ il sottoinsieme formato dai due parallelogrammi di vertici $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(4, 2)$ e $(1, 2)$ e $(1, 0)$, $(1, -1)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$ rispettivamente. Per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sia $D_{\alpha,\beta} \subset \mathbb{R}^2$ il sottoinsieme formato dai due parallelogrammi di vertici $(2, -2)$, $(-2, -2)$, $(-2, -4)$ e $(2, -4)$ e $(\alpha, -4)$, $(-\alpha, -4)$, $(\alpha + b, -5)$ e $(-\alpha + b, -5)$ rispettivamente.
Determinare, se esistono, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui $D_{\alpha,\beta}$ è affinemente equivalente a C e per tali valori determinare tutte le affinità $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tali che $F(C) = D_{\alpha,\beta}$.

Durata compito: 3 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.