ANNO ACCADEMICO 2008/2009

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I

Secondo compitino 17/12/2008

Esercizio 1.

Determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per cui la matrice

$$\begin{pmatrix} a+1 & -1 & a & -1-a \\ -a & 1 & 1-a & a \\ a & 0 & a & -a \\ a+1 & 1 & a+2 & -a-1 \end{pmatrix}$$

sia diagonalizzabile.

Esercizio 2.

Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito da $\varphi(X,Y) = {}^tXAY$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^3$, dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, e sia $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 3y - z = 0\}$

(a) Determinare la segnatura di φ.

(b) Determinare una base ortogonale di U e, se possibile, estenderla ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ (costruirla se possibile o dimostrare che non è possibile).

(c) Provare che non esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^3$ con $\dim W = 2$ tale che la restrizione di φ a W sia semidefinita negativa.

Esercizio 3.

Siano $A, B \in$M$(2, \mathbb{C})$ due matrici quadrate 2x2 a coefficienti complessi. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e siano ϕ, ψ due prodotti scalari su V.

Per ciacsuna delle seguenti asserzioni, dire se è vera o falsa motivando la risposta.

(1) Se tr(A) =tr(B) e det(A) =det(B) allora A è simile a B.

(2) Se ϕ e ψ sono definiti positivi allora $\phi + \psi$ è definito positivo.

(3) Se $i_+(\phi) = i_+(\psi) = k$ allora $i_+(\phi + \psi) = k$.

(4) Esistono ϕ e ψ tali che $i_0(\phi) = i_0(\psi) > 0$ e $i_0(\phi + \psi) = 0$.

Durata: 2 ore.

Scrivere su tutti i fogli nome e numero di marticola.