A. A. 2006/2007
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Compitino del 31/3/2008

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione n, e dati $f, g \in V^*$ poniamo $\varphi_{f,g}$ il prodotto scalare su V definito da $\varphi_{f,g}(v, w) = f(v)g(w) + f(w)g(v)$, per ogni $v, w \in V$.

1) Dimostrare che $\mathrm{Rad}\varphi_{f,g} = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.

2) Dimostrare che $\mathrm{rnk}\varphi_{f,g} \leq 2$ e che vale l'uguaglianza se e solo se f e g sono linearmente indipendenti.

3) Trovare una base per $\mathrm{Ann}(\mathrm{Rad}\varphi_{f,g})$.

4) Dimostrare che non esistono $f, g \in V^*$ tali che $\varphi_{f,g}$ ha rango 2 ed è semidefinito.

Sia ora $n = 6$.
Sia $\{v_1, \ldots, v_6\}$ una base fissata di V e sia $\{f_1, \ldots, f_6\}$ la base duale. Sia ψ il prodotto scalre non degenere su V definito da $\psi = \varphi_{f_1, f_1+f_6} + \varphi_{f_2, f_2+f_5} + \varphi_{f_3, f_3+f_4}$.

5) Calcolare l'indice di Witt di ψ.

6) Rappresentare tramite ψ il funzionale f_1.

7) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ $\mathrm{Span}(v_1 + \alpha v_6, v_2 + \alpha v_5)$ è ψ-isometrico a $\mathrm{Ann}(f_1, f_2, f_5, f_6)$? (Si identifichi V con il suo biduale tramite l'isomorfismo canonico.)