A. A. 2007/2008
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I
Compito del 6/2/2008

Esercizio 1

Si consideri la matrice di ${}_4\mathbb{R}_4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h-1 & h+1 & 0 \\ -1 & -h-1 & h+1 & 1 \\ 1-h & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

(1) Si determinino i valori del parametro reale h per cui A è diagonalizzabile.

(2) Per $h = 0$ si determini, se esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ di autovettori per A o almeno, se esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ con bandiera A-invariante.

Esercizio 2

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Siano W_1, W_2 sottospazi vettoriali di V invarianti per f.

a) Provare che se $f|_{W_1}$ e $f|_{W_2}$ sono diagonalizzabili e $W_1 + W_2 = V$, allora f è diagonalizzabile.

b) È vero che se f è diagonalizzabile, allora $f|_{W_1}$ e $f|_{W_2}$ sono diagonalizzabili e $W_1 + W_2 = V$?

c) È vero che se $f|_{W_1}$ e $f|_{W_2}$ sono diagonalizzabili, allora f è diagonalizzabile?

Esercizio 3

a) Sia $D \in {}_n\mathbb{R}_n$ una matrice diagonale definita positiva. Provare che esiste una matrice diagonale $F \in {}_n\mathbb{R}_n$ tale che $F^2 = D$.

b) Sia $A \in {}_n\mathbb{R}_n$ una matrice simmetrica definita positiva. Provare che esiste una matrice simmetrica definita positiva $S \in {}_n\mathbb{R}_n$ tale che $S^2 = A$.

c) Sia $M \in {}_n\mathbb{R}_n$ una matrice invertibile. Provare che ${}^tMM$ è simmetrica e definita positiva.

d) Sia $M \in {}_n\mathbb{R}_n$ una matrice invertibile. Provare che esistono una matrice ortogonale $P \in O(n)$ e una matrice simmetrica definita positiva S tali che $M = PS$.

Durata: 3 ore.

Scrivere su tutti i fogli nome e numero di marticola.

A. A. 2007/2008
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Compito del 6/2/2008

Esercizio 1

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sia e φ un prodotto scalare non degenere su V. Data $f \in$End(V) sia $f^* \in$End(V) l'aggiunta di f rispetto a φ.

a) Dimostrare che f è nilpotente se e solo se f^* è nilpotente.
b) Dimostrare che $f^2 = 0$ se e solo se $(f^*)^2 = 0$.
c) Dimostrare che Im$f \subset$Ker$f$ se e solo se Im$f^* \subset$Kerf^*.
d) Dimostrare che Im$f \supset$Ker$f$ se e solo se Im$f^* \supset$Kerf^*.

Esercizio 2

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e sia $f \in$End(V).
Un sottospazio $W \subset V$ f-invariante si dice semplice per f se W non può essere decomposto in somma diretta di sottospazi f-invarianti, cioè se $W = W_1 \oplus W_2$, con W_1, W_2 f-invarianti, allora $W_1 = W$ o $W_2 = W$.

a) Dimostrare che se W è semplice per f allora lo spettro di $f_{|_W}$ ha un solo elemento e che il polinomio minimo e caratteristico di $f_{|_W}$ coincidono a meno del segno.
b) Dimostrare che V si può decomporre in somma diretta di sottospazi semplici per f.

Esercizio 3

Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ il sottoinsieme composto dai segmenti ottenuti collegando in ordine i seguenti punti $(0,6)$, $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(3,3)$ e $(0,3)$. Al variare di $A, B \in \mathbb{R}$, $0 \leq A \leq 2$, si consideri $C_{A,B} \subset \mathbb{R}^2$ il sottoinsieme composto dai segmenti ottenuti collegando in ordine i seguenti punti $(5,4)$, $(1,0)$, $(3,0)$, $(A+3, A)$, $(B,2)$ e $(3,2)$.

a) Per quali valori di A e B, $C_{A,B}$ è affinemente equivalente a C?
b) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'affinità tale che la distanza tra i punti $f((0,6))$ e $f((0,0))$ sia 6 e che la distanza tra i punti $f((0,3))$ e $f((3,3))$ sia 3. È vero che $f(C)$ è isometrico a C?

Durata: 3 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di marticola.