A. A. 2007/2008
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I
Compito del 17/9/2008

Esercizio 1

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $W \subset V$ un sottospazio vettoriale di dimensione k.

Poniamo: $A = \{f : V \to V |\, f$ è lineare e $\mathrm{Ker} f \supset W\}$, $B = \{f : V \to V |\, f$ è lineare e $\mathrm{Im} f \subset W\}$, $C = \{f : V \to V |\, f$ è lineare e $f(W) \subset W\}$.

a) Verificare che A e B sono sottospazi di $\mathrm{Hom}(V, V)$ e calcolarne la dimensione.
b) Provare che $A + B = C$.
c) Dire per quali k si ha $C = A \oplus B$.

Esercizio 2

Per $\alpha \in \mathbb{R}$, sia A_α la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha-1 & 1 & \alpha+1 \\ 2 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \alpha-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Discutere la diagonalizzabilità di A_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Per $\alpha = 1$ trovare, se esiste, una base di autovettori di A_1 oppure, se esiste, una base a bandiera per A_1.

Esercizio 3

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Indichiamo con $I(V)$ l'insieme dei prodotti scalari su V per cui esiste una base di V composta da vettori isotropi.

a) Provare che $b \in I(V) \Rightarrow \mathrm{rnk}\, b \neq 1$.
b) Provare che se $b \in I(V)$ è semidefinito allora $b = 0$.
c) Nel caso $n = 2$, dire se $I(V)$ è un sottospazio dello spazio vettoriale dei prodotti scalari su V.
d) Nel caso $n = 3$, esibire, se esiste, $b \in I(V)$ che sia non degenere.

Durata: 3 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di marticola.

A. A. 2007/2008
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Compito dell'17/9/2008

Esercizio 4
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e sia φ un prodotto scalare non degenere su V. Per ogni $v \in V$, sia $f_v \in V^*$ definito da $f_v(w) = \varphi(v, w)$ per ogni $w \in V$.

1) Dimostrare che $v \in V$ è isotropo se e solo se $\varphi|_{\mathrm{Ker}\ f_v}$ è degenere.
2) Dato $v \in V$, calcolare la differenza tra l'indice di Witt di φ e l'indice di Witt di $\varphi|_{\mathrm{Ker}\ f_v}$ a seconda dei casi $\varphi(v, v) > 0$, $\varphi(v, v) = 0$, $\varphi(v, v) < 0$.

Esercizio 5
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione n.

1) Dimostrare che per ogni endomorfismo $f \in \mathrm{End}\ (V)$, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e per ogni $k \geq 1$ si ha che $\dim\mathrm{Ker}(f - \lambda id)^k \leq k \dim\mathrm{Ker}(f - \lambda id)$.
2) Per $n = 5$ costruire, se esiste, o dimostrare che non esiste una $f \in \mathrm{End}(V)$ con esattamente due autovalori tale che per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ si abbia $\dim\mathrm{Ker}(f - \lambda id)^3 = 3 \dim\mathrm{Ker}(f - \lambda id)$.
3) Determinare condizioni necessarie e sufficienti su $f \in \mathrm{End}(V)$ per cui per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ si abbia $\dim\mathrm{Ker}(f - \lambda id)^k = k \dim\mathrm{Ker}(f - \lambda id)$ per ogni $k \geq 1$.

Esercizio 6
Per $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $C_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ la conica di equazione $x^2 + \alpha^2 y^2 + 2\alpha xy + 2y + 1 = 0$.

1) Calcolare il tipo affine di C_α per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
2) Determinare il luogo dei punti $p \in \mathbb{R}^2$ per cui non esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $p \in C_\alpha$.
3) Determinare, se esiste, una retta che sia tangente a tutte le C_α.
4) Determinare, se esiste, una affinità di $\mathbb{R}^2$ che porti C_1 in C_2.

Durata: 3 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di marticola.