A. A. 2007/2008
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I e II
Compito del 12/6/2008

Esercizio 1 [G1]
Siano W_1, W_2 due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V, con $\dim W_1 = \dim W_2 = k$, tali che $V = W_1 \oplus W_2$. Sia $f\colon W_1 \to W_2$ una applicazione lineare e sia $Z = \{v + f(v) \mid v \in W_1\}$.

a) Verificare che Z è un sottospazio vettoriale di V e calcolarne la dimensione.
b) Provare che $W_2 \cap Z = \{0\}$.
c) Provare che, se f è iniettiva, allora $W_1 \cap Z = \{0\}$.
d) Se $\dim Imf = r$, calcolare la dimensione di $W_1 \cap Z$.

Esercizio 2 [G1]
Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n e sia $f\colon V \to \mathbb{K}$ una applicazione lineare non nulla. Al variare di w in V, si consideri l'applicazione $g_w\colon V \to V$ definita da $g_w(v) = f(v)w + 2v$.

a) Verificare che g_w è lineare per ogni $w \in V$.
b) Provare che g_w è triangolabile per ogni $w \in V$.
c) Trovare condizioni necessarie e sufficienti su w affinché g_w sia diagonalizzabile.
d) Nei casi in cui g_w non è diagonalizzabile, calcolarne il polinomio minimo.

Esercizio 3 [G1]
Costruire, se esiste, un prodotto scalare non degenere b su $\mathbb{R}^4$ tale che:

a) l'indice di negatività di b sia 1
b) il vettore $z = (1, 2, -1, 0)$ sia isotropo
c) la restrizione di b all'ortogonale (rispetto a b) del sottospazio

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0, y + t = 0\}$$

sia definita positiva.

G1 = Geometria I, G2 = Geometria II, R1 = recupero primo compitino Geometria 2, R2 = recupero secondo compitino Geometria 2.
Durata: G1 e G2 3 ore; R1 e R2 1 ora e mezzo.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di marticola.

A. A. 2007/2008
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I e II
Compito del 12/6/2008

Esercizio 4 [G2, R1]

Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ definito da $\varphi(X,Y) = {}^tX \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} Y$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^4$ e sia $W_\alpha = \mathrm{Span}((1,2,1,0),(1+\alpha,4,0,3-\alpha))$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui tutti i funzionali in $\mathrm{Ann}(W_\alpha)$ siano rappresentabili tramite φ.

Esercizio 5 [G2, R1]
Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione $2n$ e siano $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n \in V^*$. Definiamo $\psi : V \times V \to \mathbb{K}$ tramite la formula $\psi(v,w) = \sum_{i=1}^{n}(f_i(v)g_i(w) + f_i(w)g_i(v))$, per ogni $v, w \in V$.
1) Verificare che ψ è un prodotto scalare su V.
2) Determinare condizioni su $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$ necessarie e sufficienti affinché ψ sia non degenere.
3) Nei casi in cui ψ è non degenere, calcolare una decomposizione di Witt di V relativa a ψ.

Esercizio 6 [G2, R2]
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione $2n$ e $f : V \to V$ un endomorfismo.
1) Dimostrare che se esiste un autospazio di f di dimensione $k > n$ allora il grado del polinomio minimo di f è minore o uguale a n.
2) Calcolare tutte le possibili forme canoniche di Jordan per una f per cui esista un autospazio di dimensione $n-2$.

Esercizio 7 [G2, R2]
Dato $n \geq 2$, sia $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ considerato come spazio affine. Dati $p, q \in \mathbb{A}$, denotiamo con $L_{pq} \subset \mathbb{A}$ la retta affine per p e q se $p \neq q$ e poniamo $L_{pp} = \{p\}$. Dati $W \subset \mathbb{A}$ un sottospazio affine con $\dim W \geq 1$ e $p \in \mathbb{A}$, denotiamo con $C_p(W)$ il cono di vertice p e base W e con $Z_p(W)$ il complementare del cono meno il vertice, ovvero

$$C_p(W) = \bigcup_{q \in W} L_{pq} \qquad Z_p(W) = (\mathbb{A} \setminus C_p(W)) \cup \{p\}.$$

1) Dimostrare che $C_p(W)$ è un sottospazio affine se e solo se $p \in W$.
2) Dimostrare che se $\dim W < n-1$ allora $Z_p(W)$ non è un sottospazio affine.
3) Dimostrare che se $\dim W = n-1$, $Z_p(W)$ è un sottospazio affine se e solo se $p \notin W$.

G1 = Geometria I, G2 = Geometria II, R1 = recupero primo compitino Geometria 2, R2 = recupero secondo compitino Geometria 2.
Durata: G1 e G2 3 ore; R1 e R2 1 ora e mezzo.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di marticola.