ANNO ACCADEMICO 2007/2008
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I
Primo compitino 5/11/2007

Esercizio 1.

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione $f_\alpha : {}_2\mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f_\alpha(A) = (tr(A), tr(AP), tr(QA)) \qquad \forall A \in {}_2\mathbb{R}_2$$

dove $P = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 2\alpha & \alpha \\ \alpha & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Verificare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'applicazione f_α è lineare.

(b) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $\operatorname{Ker} f_\alpha$ ha dimensione 2.

(c) Per $\alpha = 1$:

  (i) trovare una base di $\operatorname{Ker} f_1$ e completarla ad una base di ${}_2\mathbb{R}_2$;

  (ii) costruire, se esiste, una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to {}_2\mathbb{R}_2$ tale che

$$\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f_1 \quad \text{e} \quad \operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Im} f_1.$$

Esercizio 2.

Sia w un vettore di uno spazio vettoriale V di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$. Sia $f : V \to \mathbb{K}$ una applicazione lineare non nulla e $\varphi : V \to V$ un isomorfismo. Si consideri l'insieme

$$U = \{v \in V \mid \varphi(v) = f(v)w\}.$$

(a) Dimostrare che U è un sottospazio vettoriale di V.

(b) Provare che $\dim U \leq 1$.

(c) Fornire esplicitamente un esempio in cui $V = \mathbb{R}^2$ e $\dim U = 1$.

Durata: 2 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di marticola.