A. A. 2006/2007
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I
Compito del 6/2/2007

Esercizio 1

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $f : V \to V$ un endomorfismo tale che $\dim(\operatorname{Im} f^2) = n - 1$.

(1) Dimostrare che $\dim(\operatorname{Im} f) = n - 1$,

(2) Dimostrare che $\dim(\ker f^k) = 1$ per ogni intero $k \geqslant 1$.

Esercizio 2

Al variare del parametro reale $a \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sia $f_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, l'applicazione lineare definita da $f_a(v) = M_a v$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$.

(1) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ f_a è diagonalizzabile.

(2) Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ a bandiera per f_1.

Esercizio 3

Si consideri il prodotto scalare ϕ su $\mathbb{R}^3$ definito da $\phi(X,Y) = {}^tX \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} Y$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^3$.

Al variare di $v \in \mathbb{R}^3$, si determini la segnatura (i_+, i_-, i_0) di $\phi|_{\mathrm{Span}(v)^\perp}$.

Esercizio 4

Per ciascuna delle seguenti asserzioni, dire se è vera o falsa motivando la risposta.

(1) Se una matrice quadrata A è simile ad una matrice triangolare superiore ed è simile ad una matrice triangolare inferiore, allora A è diagonalizzabile.

(2) Se una matrice quadrata A è simile ad una matrice triangolare superiore, allora A è anche simile ad una matrice triangolare inferiore.

(3) Sia V uno spazio vettoriale. Sia E il sottoinsieme di $\mathrm{Hom}(V,V)$ definito nel modo seguente:

$$E = \{ f : V \to V \mid \mu_f(0) = 0 \},$$

dove μ_f è il polinomio minimo di f. Allora E è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(V,V)$.