A. A. 2006/2007
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I
Compito del 2/7/2007

Esercizio 1

Sia $V = {}_2\mathbb{R}_2$ e, per $t \in \mathbb{R}$, si considerino i seguenti sottospazi di V:

$$\begin{aligned} W_t &= \left\{ A \in V \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \in \ker A \right\} \\ U &= \left\{ A \in V \,\middle|\, \mathrm{tr} A = 0,\ \mathrm{tr}\left(A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} \end{aligned}$$

(1) Per quali $t \in \mathbb{R}$ esiste un endomorfismo $f : V \to V$ con $f(U) = W_t$ e $f(W_t) = U$?

(2) Per quali $t \in \mathbb{R}$ esiste un endomorfismo $f : V \to V$ con $f(U) \subseteq U$ e $f(W_t) \subseteq W_t$, tale che $f|_U$ e $f|_{W_t}$ siano diagonalizzabili, e f non lo sia?

(3) Per quali $t \in \mathbb{R}$ esiste un endomorfismo $f : V \to V$ con $f(U) \subseteq U$ e $f(W_t) \subseteq W_t$, tale che $f|_U$ e $f|_{W_t}$ siano triangolabili, e f non lo sia?

Esercizio 2

Sia ϕ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito da $\phi(X, Y) = {}^tXAY$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^3$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare la segnatura di ϕ.

(2) Trovare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ composta di vettori isotropi.

(3) Trovare, se esiste, un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che $\phi_{|W}$ è nullo.

Esercizio 3

Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se è vera o falsa, motivando la risposta.

(1) L'insieme $\{A \in {}_n\mathbb{R}_n \mid$ il polinomio minimo di A divide $t^2 + t\}$ è un sottospazio di ${}_n\mathbb{R}_n$.

(2) Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ sono simili.

(3) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e ϕ un prodotto scalare non degenere su V. ϕ non ha vettori isotropi se e solo se $\dim V = 1$.

A. A. 2006/2007
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Compito del 2/7/2007

Esercizio 4
Sia φ il prodotto scalare non degenere su $\mathbb{R}^4$ definito da $\varphi(X,Y) = {}^tXAY$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^4$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) Trovare una decomposizione di Witt di $\mathbb{R}^4$ relativa a φ specificando una base per ogni fattore.
(2) Quali tra i seguenti sottospazi sono φ-isometrici? $H_1 = \mathrm{Span}((1,1,0,0),(0,0,1,1))$, $H_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 |\ x+y+z=0\}$, $H_3 = \mathrm{Span}((1,0,0,0),(0,0,0,1))^{\perp}$.

Esercizio 5
Trovare tutte le possibili forme canoniche di Jordan per un endomorfismo $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ tale che il polinomio $(t+1)^2(t-1)^2t$ appartenga all'ideale di f e valgano le seguenti disuguaglianze: $\mathrm{dimKer}(f+id)^3 \geq \mathrm{dimKer}(f-id)^2 \geq \mathrm{dimKer}f$.

Esercizio 6
Siano r e l due rette parallele distinte in $\mathbb{R}^2$ e siano P_1, P_2 due punti distinti di r e Q_1, Q_2 due punti distinti di l. Dimostrare che non esiste alcuna parabola passante per P_1, P_2, Q_1, Q_2 se e solo se P_1, P_2, Q_1, Q_2 sono i vertici di un parallelogramma.