A. A. 2006/2007 CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I Compito del 17/1/2007

Esercizio 1
Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z + t = 0, 2x - y + 3z - t = 0, -x + 8y - 9z + 5t = 0\}.$$

Dire per quali valori del parametro reale h il sottospazio W coincide con l'insieme delle soluzioni $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ del sistema lineare

$$\begin{cases} (2 + h)x + (2h - 1)y + (3 - h)z + 2ht = 0 \\ x + 2y - h^2 z - ht = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, e sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Supponiamo che esista un intero k_0 con $0 < k_0 < n$ tale che tutti i sottospazi di V di dimensione k_0 sono f-invarianti. Mostrare che tutti i sottospazi di V sono f-invarianti (indipendentemente dalla loro dimensione).

Esercizio 3
Sia ${}_2\mathbb{R}_2$ lo spazio delle matrici 2×2 reali, e W il sottospazio

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

Costruire un endomorfismo $f : {}_2\mathbb{R}_2 \to {}_2\mathbb{R}_2$ che verifichi tutte le seguenti condizioni:

(1) la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sia un autovettore per f
(2) $f(W) = W$
(3) f non sia diagonalizzabile
(4) f abbia rango 3
(5) $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4
Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Siano W_1 e W_2 due sottospazi di V tali che $V = W_1 + W_2$. Siano ϕ_1 e ϕ_2 due prodotti scalari, rispettivamente su W_1 e W_2, tali che $\phi_1|_{W_1 \cap W_2} = \phi_2|_{W_1 \cap W_2}$.

(1) Mostrare che esiste un prodotto scalare ϕ su V le cui restrizioni su W_1 e W_2 coincidono rispettivamente con ϕ_1 e ϕ_2.
(2) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Supponiamo che ϕ_1 sia definito positivo e che ϕ_2 sia non degenere con indice di positività $i_+(\phi_2)$ uguale a $\dim(W_1 \cap W_2)$. Sia ϕ un prodotto scalare su V che estende ϕ_1 e ϕ_2 (nel senso del punto (1)). Calcolare la segnatura di ϕ.