A.A. 2005–2006 Corso di Laurea in Fisica
Geometria I e II
Appello del 13/6/2006

Esercizio 1 (G1).
Siano U e W_α i sottospazi seguenti di $\mathbb{R}^4$, dove W_α dipende da un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right); \quad W_\alpha = \begin{cases} x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

(1) Determinare l'insieme Γ di tutti i valori $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $U + W_\alpha \neq \mathbb{R}^4$.
(2) Per ogni $\alpha \in \Gamma$, costruire un prodotto scalare ϕ su $\mathbb{R}^4$ che soddisfi queste proprietà:
- $U \subset W^\perp$ e $W \subset U^\perp$;
- Il radicale di ϕ è il sottospazio determinato dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ 9x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 (G1, G1+2).
Sia $B \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice invertibile con $\operatorname{tr}(B) \neq 0$. Consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} f : M(n,\mathbb{R}) &\longrightarrow M(n,\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto \operatorname{tr}(AB) \cdot I_n + A \end{aligned}$$

dove I_n è la matrice identità.

(1) Mostrare che f è lineare.
(2) Dimostrare che esiste in $M(n, \mathbb{R})$ un sottospazio W di dimensione $n^2 - 1$ tale che $f|_W = \mathrm{id}_W$.
(3) Dimostrare che f è diagonalizzabile.

Esercizio 3 (G1).
Sia $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ una matrice.

(1) Mostrare che esistono una matrice ortogonale $P \in O(n)$ e una matrice invertibile $M \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ tali che

$$MAP = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

per qualche intero r.
(2) Mostrare che il rango di $A\,{}^tA$ è uguale al rango di A.
(3) Determinare P e M come nel punto (1) nel caso in cui

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; G1+2 = Geometria I+II e Vecchio ordinamento.
Durata: 3 ore.

Esercizio 4 (G2, G1+2).

1) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e siano $f_1, f_2 \in V^*$, $v_1, v_2 \in V$ indipendenti e φ un prodotto scalare su V tali che, $f_1(v_2) = f_2(v_1) = \varphi(v_1, v_2)$, $f_1(v_1) = \varphi(v_1, v_1)$, $f_2(v_2) = \varphi(v_2, v_2)$.
Dimostrare che $\ker(f_i) \cap \text{Span}(v_1, v_2) = \text{Span}(v_i)^{\perp} \cap \text{Span}(v_1, v_2)$ per $i = 1, 2$.

2) Sia $V = {}_2\mathbb{R}_2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $f_1, f_2 \in V^*$ definiti da $f_1(A) = tr(AB)$, $f_2(A) = a$ per ogni $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$, $v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
Dimostrare che se φ è un prodotto scalare non degenere su V tale che f_1 si rappresenti tramite φ con v_1 e f_2 si rappresenti tramite φ con v_2, allora l'indice di Witt di φ è 2 se e solo se la restrizione di φ a $\text{Ker}(f_1) \cap \text{Ker}(f_2)$ è definita negativa.

3) Con le stesse notazioni del punto 2, mostrare che per ogni $k = 0, 1, 2$ esite un prodotto scalare non degenere φ su V tale che f_1 si rappresenti tramite φ con v_1, f_2 si rappresenti tramite φ con v_2 con indice di Witt uguale a k.

Esercizio 5 (G2, G1+2).

Trovare tutte le possibili forme canoniche di Jordan per un endomorfismo $F : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ tale che $\dim\text{Ker}(F^4) = 3$, $\dim\text{Ker}(F - 2id)^3 = 2$ e tale che il polinomio minimo di F coincida, a meno del segno, con il polinomio caratteristico di F.

Esercizio 6 (G2, G1+2).

Sia A un spazio affine. Dati $S \subset A$ un sottospazio affine non vuoto e p un punto di A definiamo $T_{p,S} = \{Q \in A \mid \exists q \in S : \; Q = 3p - 2q\}$.

1) Dimostrare che $T_{p,S}$ è un sottospazio affine di A.

2) Dimostrare che $\text{Giac}(T_{p,S}) = \text{Giac}(S)$.

3) Dimostrare che $T_{p,S} = S$ se e solo se $p \in S$.

4) Dimostrare che per ogni $q \in T_{p,S}$ si ha $T_{\frac{p+q}{2}, T_{p,S}} = S$.