ANNO ACCADEMICO 2005/2006

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I Primo compitino 4/11/2005

Esercizio 1

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere l'esistenza e l'unicità delle soluzioni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ del seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y - z &= 3 \\ -x + y + (\alpha + 1)z &= -2 \\ x + 3y + (\alpha^2 - 1)z &= \alpha + 4 \end{cases}$$

Esercizio 2

Considerare i due seguenti sottoinsiemi di ${}_2\mathbb{R}_2$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad V = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

1) Dimostrare che U è un sottospazio vettoriale di ${}_2\mathbb{R}_2$.

2) Calcolare le dimensioni dei sottospazi U e V.

3) Costruire una applicazione lineare $f : {}_2\mathbb{R}_2 \to {}_2\mathbb{R}_2$ tale che:

$$\mathrm{Ker}\, f = U \cap V \qquad \mathrm{Im}\, f = U + V$$

Esercizio 3

Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.

a) Siano h e k due interi positivi. Esistono due applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^h$ e $g : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}^k$ tali che $g \circ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ è un isomorfismo se e solo se $h \geqslant k$.

b) Esistono tre sottospazi U, V e W di $\mathbb{R}^4$ tali che $\dim U = \dim V = \dim W = 3$ e $U \cap V \cap W = \{0\}$.