ANNO ACCADEMICO 2004/2005

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA II

Primo compitino 13/4/2005

Sia $E_{i,j} \in {}_n\mathbb{R}_n$ la matrice i cui elementi sono tutti nulli eccetto quello di posto (i,j) che vale 1, e sia φ il prodotto scalare su ${}_n\mathbb{R}_n$ definito da $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}A\mathrm{tr}B + \mathrm{tr}(AB)$ $\forall A, B \in {}_n\mathbb{R}_n$. Sia $T = \{M \in {}_n\mathbb{R}_n |\ M^2 \neq 0,\ \mathrm{tr}M^3 = 0,\ M$ è triangolabile$\}$ e data $A \in {}_n\mathbb{R}_n$ sia $W_A = \mathrm{Span}(A, A^2)$.

1) Dimostrare che φ è non degenere.
(Si può usare il fatto che $\psi(A,B) = \mathrm{tr}(A^tB)$ è un prodotto scalare definito positivo su ${}_n\mathbb{R}_n$ e che ${}_n\mathbb{R}_n$ è somma diretta dei sottospazi delle matrici simmetriche e anti-simmetriche)

2) Rappresentare, tramite φ, il funzionale tr: ${}_n\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$.

3) Dimostrare che $\mathrm{Span}(E_{i,j}, E_{j,i})$ è un piano iperbolico per $i \neq j$ e che la restrizione di φ a $\mathrm{Span}(E_{1,1}, .., E_{n,n})$ è definita positiva.

4) Calcolare una decomposizione di Witt di ${}_n\mathbb{R}_n$ e la segnatura di φ.

5) Dimostrare che se $A \in T$ allora $\dim W_A = 2$.
(Usare il polinomio minimo di A)

6) Dimostrare che $\forall A, B \in T$ tali che $\varphi_{|W_A}$ e $\varphi_{|W_B}$ sono non degeneri, W_A e W_B sono φ-isometrici.
(Si può usare il fatto che se $A \in {}_n\mathbb{R}_n$ è triangolabile, allora $\mathrm{tr}A^2 \geq 0$)