A. A. 2004/2005 CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I e II Compito del 19/09/2005

Esercizio 1 (G1)
Discutere, al variare del parametro reale t, l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} x+y+tz=1 \\ x+y+t^3z=3 \\ 2x+2y+(1+t)z=1 \\ x+z=0 \end{cases}$$

Esercizio 2 (G1, G1+2)
Siano r, s e t tre rette distinte in $\mathbb{R}^n$ passanti per l'origine e sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare tale che $F(r) = s, \qquad F(s) = t, \qquad F(t) = r.$

(1) Dimostrare che se $n = 3$ e le tre rette non sono complanari allora F non è diagonalizzabile.
(2) È ancora vero che F non è diagonalizzabile se $n = 3$ ma le tre rette sono complanari?
(3) È ancora vero che F non è diagonalizzabile se $n > 3$?

Esercizio 3 (G1, G1+2)
Sia ϕ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ definito dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare la segnatura di ϕ.
(2) Costruire un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ non nulla tale che $\phi\big(X, F(Y)\big) = 0$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^4$.
(3) Dimostrare che l'insieme $\{F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 |\ \phi\big(X, F(Y)\big) = 0\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^4\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 4 (G1)
Sia ψ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+1 & a+2 & a+1 \\ a+2 & a+1 & a \end{pmatrix}$$

dipendente da un parametro reale $a \in \mathbb{R}$. Dire se esistono dei valori $a \in \mathbb{R}$ per cui ψ è definito positivo o definito negativo.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; G1+2 = Geometria I+II. Durata: 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

Esercizio 5 (G2, G1+2)
Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ con polinomio caratteristico $p_f(x) = (x-1)^2(x-2)^2$ e tale che esistono un numero finito di sottospazi di $\mathbb{C}^4$ di dimensione 2 f-invarianti.
Dimostrare che tali sottospazi f-invarianti sono esattamente 3.

Esercizio 6 (G2)
Sia φ il prodotto scalare non degenere su $\mathbb{R}_3[x]$ definito da

$$\varphi(p,q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) - p'(0)q'(0) - p'(1)q'(1), \ \forall p,q \in \mathbb{R}_3[x].$$

1) Determinare una decomposizione di Witt per φ.
2) Rappresentare tramite φ il funzionale $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ definito da $F(p) = \int_0^1 p(t)dt \ \forall p,q \in \mathbb{R}_3[x]$

Esercizio 7 (G2, G1+2)
Sia $C_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ la conica di equazione $(\lambda+1)x^2 + 2xy + \lambda y^2 + 2\lambda x - 2y + 1 = 0$, dove $\lambda \in \mathbb{R}$.
1) Determinare, al variare di λ, il tipo affine di C_λ.
2) Dimostrare che il luogo dei centri delle coniche C_λ è a sua volta una conica non degenere. È tale conica isometrica alla conica di equazione $x^2 + 4xy + y^2 + 2y - 1 = 0$?