A. A. 2004/2005 CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I e II Compito del 7/2/2005

Esercizio 1

a) Provare che per ogni n dispari non esiste alcuna applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, l'insieme $\{v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

b) Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare. Dimostrare che g ha 3 autovalori distinti se e solo se g è diagonalizzabile ed esiste $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$ tale che $\{v, g(v), g^2(v)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2

Si consideri la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Dire se A è diagonalizzabile; se lo è, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ di autovettori per A.

b) Dire se A è triangolabile; se lo è, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ a bandiera per A.

Esercizio 3

a) Sia V uno spazio vettoriale, W un sottospazio di V e ϕ un prodotto scalare su V. Dimostrare che se $W + W^\perp = V$ allora $W \cap W^\perp$ è contenuto nel radicale di ϕ.

b) In $\mathbb{C}^4$ si considerino i seguenti sottospazi:

$$U = \mathrm{Span}((1,1,0,0),(0,0,1,1)) \qquad W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4 \mid x + y - z - t = 0\}.$$

Calcolare il rango di un qualsiasi prodotto scalare su $\mathbb{C}^4$ tale che $W = U^\perp$ e $U = W^\perp$.

c) Costruire un esempio di un prodotto scalare su $\mathbb{C}^4$ che verifichi le proprietà del punto b).

Esercizio 4

Si consideri $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare ordinario $<,>$ e siano $U \neq \{0\}$ e $W \neq \{0\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^4$ tali che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che U e W sono f-invarianti, $f_{|U}$ è simmetrica rispetto a $<,>_{|U}$ e $f_{|W}$ è simmetrica rispetto a $<,>_{|W}$. È vero che ogni $f \in \mathcal{F}$ è simmetrica? (Motivare la risposta)

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; VO = Vecchio ordinamento e Geometria I+II. Durata: G1 e G2 2,5 ore, VO 3 ore.

Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.