

ANNO ACCADEMICO 2003/2004
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I Secondo compito 17/12/2003

Esercizio 1

Nello spazio vettoriale ${}_3\mathbb{R}_3$ si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Dire se A è diagonalizzabile.
- b) Dire se A e B sono simili.
- c) Trovare, se esiste, una base di \mathbb{R}^3 formata da autovettori sia per A che per B .

Esercizio 2

Sia V lo spazio dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti reali. Costruire, se esiste, un prodotto scalare g su V tale che

- a) il radicale di V sia il sottospazio generato da x
- b) $x + 1$ e $x^2 + 1$ siano vettori isotropi
- c) $g(x^2 + 4x + 2, x^2 + 4x + 2) = 2$.

Determinare la segnatura di g .

Esercizio 3

Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.

- a) Sia Φ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V di dimensione n e sia W un sottospazio di V . Se $\dim(W \cap W^\perp) > 0$, allora Φ è degenere.
- b) Siano A e B matrici in ${}_n\mathbb{R}_n$, con B invertibile. Sia $p(x) = \det(A + xB)$. Se $a \in \mathbb{R}$ è una radice di $p(x)$, allora a è autovalore per AB^{-1} .
- c) Sia $T(2, \mathbb{R}) = \{f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \mid f \text{ è triangolabile}\}$. Allora $T(2, \mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale di $\text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.