ANNO ACCADEMICO 2002/2003

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I

Primo compitino 5/11/2002

Esercizio 1

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, sia U_k il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$U_k = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+y+kz+kt = 0, 2x+(2-k)y+3kz = 0, (2-k)x+2y+4kt = 0\}$.

Sia $W = \mathrm{Span}((1, 1, 2, 3), (1, 0, -1, -1), (-2, 1, 1, 1), (-2, 2, 4, 5)) \subset \mathbb{R}^4$.

1) Calcolare la dimensione di U_k al variare di k.

2) Per quali k, W e U_k sono isomorfi?

3) Costruire una base di $T = W \cap U_0$.

4) Trovare un sottospazio $Z \subset \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus Z = \mathbb{R}^4$

Esercizio 2

Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2 e sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -x+y+z = 0\}$. Sia S l'insieme delle applicazioni lineari $f : V \to \mathbb{R}^3$ tali che $f(x^2 + x - 1) = (1, -1, 2)$, $f(x^2 + 1) = (2, 2, 1)$ e $W \subset \mathrm{Im} f$.

1) Dimostrare che S è non vuoto.

2) Dimostrare che ogni $f \in S$ è un isomorfismo.

3) Esiste $f \in S$ tale che $f(2x - 4) = (0, 1, 1)$?

4) Esiste $f \in S$ tale che $f(x) = (0, -4, 3)$?

Esercizio 3

Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.

a) Si considerino le due matrici reali $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. È possibile trasformare A in B attraverso un numero finito di operazioni elementari per riga.

b) Esistono $A, B \in {}_3\mathbb{R}_3$ tali che $\mathrm{rnk} A = \mathrm{rnk} B = 2$ e $\mathrm{rnk} AB = 3$.

c) Esistono $A, B \in {}_3\mathbb{R}_3$ tali che $\mathrm{rnk} A = \mathrm{rnk} B = \mathrm{rnk} AB = 2$.