ANNO ACCADEMICO 2002/2003

CORSO DI LAUREA IN FISICA

GEOMETRIA II

PRIMO COMPITINO 3/4/2003

Posto $V = {}_n\mathbb{R}_n$, e fissata $S \in V$ simmetrica invertibile, consideriamo il prodotto scalare su V dato dalla formula $\varphi_S(A,B) = tr({}^tASB)$. Siano $f_1, f_2 \in V^*$ definiti da $f_1(A) = tr(A)$, $f_2(A) = tr(AS)$. Data $X \in V$, siano $R_X, L_X, T \in \mathrm{End}\,(V)$ definiti da: $R_X(A) = AX$, $L_X(A) = XA$, $T(A) = {}^tA$.

1) Dimostrare che φ_S è non degenere.

(Si puo' assumere noto il fatto che φ_I è definito positivo)

2) Rappresentare f_1 e f_2 tramite φ_S .

3) Calcolare gli endomorfismi aggiunti di R_X e L_X e dimostrare che $R_S \circ T$ è autoaggiunta rispetto a φ_S . (Usare il fatto che $tr(AB) = tr(BA)\ \forall\ A, B \in V$)

Per $n = 2$ e $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ rispondere alle seguenti domande:

4) Mostrare che Span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è totalmente isotropo e dedurne la segnatura di φ_S .

5) Siano $f_3, f_4 \in V^*$ definiti da $f_3(A) = a_{11} - a_{22}$, $f_4(A) = f_3(AS)$. Mostrare che $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ è una base di V^* e trovare la base $\mathcal{B}$ di V tale che la base duale di $\mathcal{B}$ sia $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

6) Dire quali dei seguenti sottospazi sono φ_S -isometrici:

$U_1 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $U_2 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}^\perp$,

$U_3 = \{A \in V |\ (2,3) \in \mathrm{Ker}\, A\}$, $U_4 = [\,\mathrm{Ann}(\mathrm{Span}\,\{f_1, f_2\})]^\perp$.

(Usare l'identificazione naturale tra $(V^*)^*$ e V)