Esercizi impegnativi: una stella
Foglio di Esercizi 6
Corso di Teoria Geometrica della Misura
Anno Accademico: 2012-2013

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
magnani@dm.unipi.it

Pisa, 26 Maggio 2013

1. Sia μ una misura non negativa su X e sia Y uno spazio metrico separabile. Siano $A \subset X$ un insieme μ-misurabile di μ-misura finita e sia $S \subset Y$. Definiamo $f : A \times S \to \mathbb{R}$ e assumiamo che valgano le seguenti:

   (a) $f(x, \cdot) : S \to \mathbb{R}$ è continua per ogni $x \in A$,

   (b) $f(\cdot, y) : S \to \mathbb{R}$ è μ-misurabile per ogni $y \in S$.

   Provare che per ogni $y_0 \in S$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme μ-misurabile $F \subset A$ tale che $\mu(A \setminus F) \leq \varepsilon$ e vale

$$\sup_{x \in F} |f(x, y) - f(x, y_0)| \to 0 \quad \text{per} \quad y \to y_0\,.$$

2. Provare che i contenuti di Minkowski superiori e inferiori $\mathcal{M}_+^{n-1}$ e $\mathcal{M}_-^{n-1}$ non sono additivi sui boreliani.

3. Siano $-\infty < a < b < +\infty$ e sia $u : (a, b) \to \mathbb{R}$. Provare che u è uguale ad una funzione a variazione limitata a meno di una modifica su un insieme $\mathcal{L}^1$-trascurabile se e solo se appartiene a $BV(a, b)$.

4* Se $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà $(n-1)$-dimensionale e di classe C^1, provare che

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma \cap B(x, r)) = \omega_{n-1} r^{n-1} + o(r^{n-1})$$

per $x \in \Sigma$ e $r \to 0^+$, ove $B(x, r) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\big\}$ e abbiamo posto $\omega_{n-1} = \mathcal{L}^{n-1}\big(\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x| < 1\}\big)$.