Esercizi impegnativi: una stella.
Corso di Teoria Geometrica della Misura
Anno Accademico: 2012-2013

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
magnani@dm.unipi.it
Pisa, 8 Aprile 2013

Definiamo famiglie "annidate di insiemi". Dati $k, m \in \mathbb{N}^+$ con $k < m^n$, si consideri $\mathcal{F} = \{E_{j,l} : j \in \mathbb{N},\ l \in \wr 1, k^j \wr\}$, formata da insiemi compatti di $\mathbb{R}^n$ con interno non vuoto e si fissino le costanti geometriche $\sigma_n, \gamma_n > 0$. Si assume che per ogni $j \in \mathbb{N}$ valgano le seguenti proprietà.

1. Per ogni $l, l' \in \wr 1, k^j \wr$ ed $l \neq l'$, abbiamo $\mathrm{Int}E_{j,l} \cap \mathrm{Int}E_{j,l'} = \emptyset$ (insiemi della j-esima generazione)
2. Per ogni $j \in \mathbb{N}$, abbiamo $\wr 1, k^{j+1} \wr = \bigcup_{s=1}^{k^j} \Upsilon_s$ con $\sharp\Upsilon_s = k$ e $\bigcup_{l\in\Upsilon_s} E_{j+1,l} \subset E_{j,s}$.
3. Se $E_{j,l} \supset E_{j+1,s}$ for all $s \in \Upsilon_l \subset \wr 1, k^{j+1} \wr$ with $\sharp\Upsilon_l = k$ abbiamo $E_{j,l} \setminus \bigcup_{u\in\Upsilon_l} E_{j+1,u} = E_{j,l} \setminus \bigcup_{u=1}^{k^{j+1}} E_{j+1,u}$
4. Abbiamo $E_{jl} \not\subset \bigcup_{l=1}^{k^{j+1}} E_{j+1,l}$
5. Abbiamo $\mathrm{diam}E_{jl} = \gamma_n/m^j$ and $\mathcal{L}^n(E_{j,l}) = \sigma_n/m^{jn}$

Definiamo $C = \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{k^j} E_{j,l}$ essere l'insieme frattale associato ad $\mathcal{F}$. Si noti che $C \neq \emptyset$, poichè tutte le intersezioni finite dei $\bigcup_{l=1}^{k^j} E_{j,l}$ sonon non vuote e sono tutte contenute nel compatto $E_{0,1}$.

Associata ad $\mathcal{F}$, definiamo la funzione

$$\tilde{\mu}(E_{j,l}) = \frac{1}{k^j} \quad \text{per tutti i } j \in \mathbb{N} \text{ e } j \in \wr 1, k^j \wr\,.$$

Ricordando che C è il frattale associato ad $\mathcal{F}$, per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ definiamo

$$\mu(A) = \inf\Big\{ \sum_{(j,l)\in I} \tilde{\mu}(E_{jl}) :\ A \cap C \subset \bigcup_{(j,l)\in I} E_{j,l},\ I \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ \Big\},$$

detta "distribuzione di massa" su C.

Dimostrare i seguenti enunciati.

1 Se $\mathcal{F} = \{E_{j,l} : j \in \mathbb{N},\ 1 \le l \le k^j\}$ è una famiglia annidata di insiemi, provare che se $(j,l), (i,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ con $j < i$, allora abbiamo $\mathrm{Int}E_{i,s} \cap \mathrm{Int}E_{j,l} = \emptyset$, oppure $E_{i,s} \subset E_{j,l}$.

2* Provare che μ una misura boreliana che soddisfa $\mu(E_{j,l}) = \mu(\mathrm{Int}E_{j,l}) = k^{-j}$ per tutte le coppie (j,l) e $\mu(C) = 1$.

3 Provare che μ è borel regolare.

4 Provare che se $\alpha = \log k/\log n$, allora $\mathcal{H}^\alpha(C) < +\infty$.

5* Se $\alpha = \log k/\log m$, provare che esiste una costante geometrica θ, tale che $\mu(\mathbb{B}(x,r)) \le \theta\, r^\alpha$ per ogni $x \in C$ ed $r > 0$ sufficientemente piccolo, solo dipendente da $\mathcal{F}$. Concludere pertanto che $\mathcal{H}^\alpha(C) > 0$.

6 Calcolare la dimensione di Hausdorff del "Tappeto di Sierpiński", del "Triangolo di Sierpiński" e della "Polvere di Cantor". Gli ultimi due sono rappresentati dalle figure seguenti.

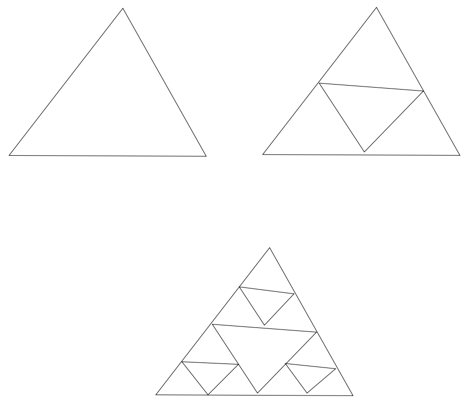

Figure 1: Triangolo di Sierpiński

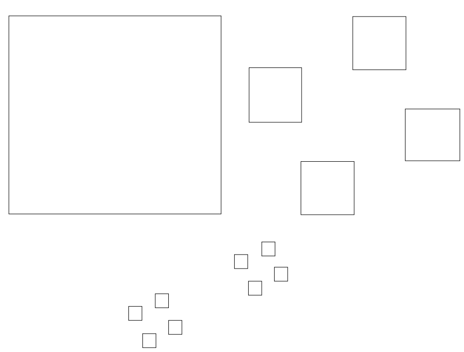

Figure 2: Polvere di Cantor