

Programma del corso di *Analisi Reale*.

Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, a.a. 2023/2024.

1. **Misure e misure esterne.** Spazi misurabili, misure esterne e proprietà basilari, teorema di Carathéodory per misure esterne, funzioni misurabili e loro approssimazione, misura di Lebesgue, insiemi non misurabili, algebre, anelli e semianelli di insiemi, estensione di Carathéodory-Hahn.

2. **Teoria dell'integrazione astratta e spazi di Lebesgue.** Integrale di Lebesgue su uno spazio misurabile, teoremi di Beppo Levi, Fatou e Lebesgue. Continuità e derivabilità di integrali rispetto ad un parametro. Proprietà basilari degli spazi $L^p(X, \mu)$ rispetto a una misura μ e loro completezza. Convergenze in $L^p(X, \mu)$, puntuali q.o., in misura e relative implicazioni. Disuguaglianza di Jensen.

3. **Operazioni sulle misure.** Misure con segno, teorema di Hahn e decomposizione di Jordan per misure con segno, variazione totale, assoluta continuità dell'integrale e teorema di Radon-Nikodym.

4. **Misure e topologia.** Misure boreliane, approssimazione di boreliani con aperti, chiusi e compatti, criterio di Carathéodory per misure boreliane, misure di Radon su spazi topologici, teorema di Lusin e densità delle funzioni continue in $L^p(X, \mu)$. Teorema di rappresentazione di Riesz per funzionali sullo spazio delle funzioni continue a supporto compatto.

5. **Teoremi di Fubini e di Tonelli.** Prodotto di misure, teoremi di Fubini e di Tonelli su spazi misurabili, con controesempi per ipotesi più deboli.

6. **Funzioni assolutamente continue e a variazione limitata.** Teoremi di ricoprimento di Vitali, differenziabilità quasi ovunque delle funzioni monotone, funzioni a variazione limitata e funzione di Cantor. Funzioni assolutamente continue e loro caratterizzazione tramite il teorema fondamentale del calcolo.

7. **Misura di Hausdorff, frattali e formula di area.** Misura di Hausdorff e dimensione di Hausdorff, esempi di calcolo della dimensione di Hausdorff per frattali, mappe holderiane e misura di Hausdorff, uguaglianza tra misura di Hausdorff e misura di Lebesgue, formula dell'area e cambiamento di variabile nello spazio euclideo.

8. **Argomenti opzionali I.** Misure vettoriali, integrale di Bochner e controesempi al teorema di Radon-Nikodym per misure a valori in uno spazio di Banach. Relazione tra misure e misure esterne.

9. Argomenti opzionali II. Topologia della convergenza locale sui compatti, teorema di approssimazione di Stone e separabilità di $C_c(X)$, dove X è uno spazio metrico separabile.

10. Argomenti opzionali III. Integrale di Lebesgue su spazio misurabile tramite opportune somme superiori e inferiori. Differenze tra integrazione secondo Lebesgue e integrazione secondo Riemann. Caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann.

N.B. Tutti i teoremi del programma sono da intendersi con relative dimostrazioni.