Complementi di Analisi Matematica. Foglio di esercizi n.5
14/3/2019

`Esercizi su massimi e minimi liberi`

1. Sia $f : (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come
$$f(x,y,z) = \frac{y + z^2 + x}{x^2 + y^2}.$$
Stabilire se f ha massimo globale. Sapendo che f ha minimo globale, determinarlo, assieme a tutti gli eventuali punti critici.

2. Data $f(x,y,z) = \frac{1}{2}[(x-y-z)^2 + (x+y+z)^2]$.
   (a) Determinare i punti critici di f.
   (b) Stabilire se f ha punti di massimo o di minimo globali. In tal caso determinarli.

3. Calcolare la matrice hessiana di $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$.

4. Scrivere l'immagine della funzione $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$, definita come
$$f(x,y) = x^2 y - x^3 + 1.$$

5. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita come $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2+1}$. Sapendo che f ha massimo e minimo globali, si determini l'immagine $f(\mathbb{R}^2)$.

6. Si consideri $f(x,y,z) = \sin(e^{x^2+y^2+z^2})$ definita sull'insieme
$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq \log \pi + \log \frac{1}{2}\right\}.$$
   (a) Determinare tutti i punti critici di f.
   (b) Determinare il massimo ed il minimo di f
   (c) Determinare tutti i punti di massimo ed i punti di minimo di f.

7. Scrivere il massimo ed il minimo di
$$f(x,y,z) = z^2 + \sin\left(\frac{x+y^2}{2}\right)$$
su $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$, evidenziando i principali passaggi che hanno portato alla determinazione di tali valori.

   Sugg. Controllare l'esistenza dei punti critici prima nella parte interna $\mathring{D}$. Dedurre quindi l'esistenza del massimo e del minimo nei punti di ∂D. Osservare che sin è monotona crescente in $[-1,1]$. Si osservi che non occorre utilizzare la matrice hessiana per la risoluzione di questo esercizio.

8. Consideriamo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definita come
$$f(x, y, z) = y \sin x + z^2.$$
   (a) Determinare l'immagine di f.
   (b) Determinare massimi e minimi locali e globali, nel caso esistano.
   (c) Determinare i punti di massimo e di minimo locale e globale, nel caso esistano.
9. Scrivere l'immagine di $f(x, y) = -\sin^2(x - y)$, definita su $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$.
10. Data $f(x, y) = \dfrac{e^{-x^4}}{1 + |x| + |y|}$, si determini $f(\mathbb{R}^2)$.
11. Sapendo che $f(x, y) = xye^{-4x^2-y^2}$ ha massimo e minimo globali in $\mathbb{R}^2$, determinarli.
12. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $f(x, y) = x^3 - xy^2 + 2x^2 + y^2$.
   (a) Determinare $\sup_{\mathbb{R}^2} f$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f$.
   (b) Determinare massimi e minimi locali e globali, nel caso esistano.
   (c) Determinare i punti di massimo e di minimo locale e globale, nel caso esistano.
13. Definiamo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^3 - xy^2 + 2x^2 + zy^2$.
   (a) Determinare $\sup_{\mathbb{R}^3} f$ e $\inf_{\mathbb{R}^3} f$.
   (b) Determinare tutti i punti critici.
   (c) Stabilire se la matrice hessiana in tali punti è definita positiva, definita negativa, invertibile o diversamente.