

Analisi II. Foglio di esercizi n.3
1/11/2018

Esercizi sull'integrazione di più variabili

1. Provare che le funzioni $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definita come

$$f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq 1 \\ e^{x_1} & \text{se } \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| > 1 \end{cases}$$

e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definita come

$$g(x, y) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

sono entrambe misurabili.

2. Definiamo $Z \subset (0, +\infty)$ trascurabile ed $f : [0, +\infty) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ come segue

$$f(x) = \begin{cases} \log x & \text{se } x \in (0, +\infty) \setminus Z \\ -\infty & \text{se } x = 0 \\ +\infty & \text{se } x \in Z \end{cases}.$$

Stabilire se f è misurabile, argomentandone la risposta.

3. Provare che $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile se e solo se la sua funzione caratteristica $\mathbf{1}_E$ è misurabile.

4. Provare che $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è integrabile su E se tale insieme è trascurabile ed in tal caso

$$\int_E f(x) dx = 0.$$

5. Provare che se $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile e

$$\int_E |x| dx < +\infty$$

allora E ha misura finita e ammette un baricentro.

6. Stabilire se il seguente sottoinsieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < e - 1, 0 < x + xy < 1\}$$

ha area finita ed in tal caso calcolarla.

7. Siano $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, e consideriamo $\rho : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, +\infty)$ continua. Definiamo l'insieme

$$E = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 < r < \rho(\theta)\}.$$

Usando le coordinate polari, provare che vale la formula

$$\mathbf{m}_2(E) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\theta)^2 d\theta.$$

8. Dati $r > 0$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, calcolare l'area del disco

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

utilizzando le coordinate polari. Fissato $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, si calcoli il volume del solido sferico

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\}$$

usando le coordinate sferiche.

9. Per $r > 0$ definiamo $B(0, r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < r^2\}$ e

$$\Phi(r) = \int_{B(0, r)} (x^2 + y^2 + z^2)^2 dx dy dz.$$

Calcolare $\Phi(r)$.

10. Calcolare il volume dell'intersezione di due cilindri

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, x^2 + z^2 \leq r^2\}.$$

11. Considerato l'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 + 2x^2 + 2y^2 < z < 2 - 2x^2 - 2y^2\}.$$

Si tracci il grafico di tale insieme e se ne calcoli il volume.

12. Considerato l'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 1 < x + y < 2\}$, si tracci il grafico di tale insieme. Stabilire se esiste, ed in tal caso scrivere

il valore dell'integrale $\int_E \frac{1}{x+y} dx dy$.

13. Definito l'aperto $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 - 4 < 0 \text{ e } x^2 + z^2 - 1 < y < 5\}$, se ne tracci un grafico qualitativo e si scriva il valore del suo volume.

14. Scrivere il valore del volume dell'insieme

$$O = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 < 4 \text{ e } z > 0\}.$$

15. Consideriamo $E_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq \lambda\}$. Studiare l'integrabilità di z^α su E al variare di $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$. In tal caso calcolare

$$\int_{E_\lambda} z^\alpha dx dy dz.$$

16. Dimostrare l'integrabilità di $(x, y) \rightarrow \sin(x + y)$ su $E = (0, \pi/2) \times (0, \pi)$ e calcolare $\int_E \sin(x + y) dx dy$.

17. Stabilire se l'insieme $E = \{(x, y, z) : x^2 \leq z \leq x - y^2\}$ ha misura finita ed in tal caso calcolarla.

18. Siano $\alpha > 0$ ed $E_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1, -\frac{1}{y^\alpha} \leq x < 0\}$. Provare che E_α è misurabile e calcolarne la misura per ogni $\alpha > 0$.

19. Si provi che l'insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ costituito dai punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$-1 \leq xy \leq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 4 \quad \text{e} \quad \min\{x - y, x + y\} \geq 0,$$

è misurabile. Si studi l'integrabilità di $f(x, y) = (x^2 - y^2) \cos(xy)$ su D ed in caso di integrabilità si calcoli $\int_D f(x, y) dx dy$.

20. Si consideri $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x - y \leq 1 \leq y \leq 2\}$ e si calcoli $\int_D (x^2 - y^2) dx dy$.

21. Stabilire l'integrabilità della funzione

$$f(x, y, z) = z(3x^2 - 2y^2) \frac{e^{x^2+y^2}}{x^2 + y^2}$$

sul dominio $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z \leq 2, z^2 \leq x^2 + y^2\}$ ed in tal caso calcolarne l'integrale.

22. Provare che il seguente insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, 0 < y < x/2\}$$

è misurabile e calcolare

$$\int_A \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2 y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}} dx dy \in [0, +\infty],$$

finito o infinito.

23. Al variare di $\alpha > 0$ stabilire se la misura dell'insieme

$$E_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, y \geq 1, y^{2\alpha}(z + x^2) \leq 1\}$$

è finita ed in tal caso calcolarla.

Suggerimento: integrare prima rispetto ad $y \in [1, +\infty)$.

24. Calcolare l'integrale

$$\int_Q (x^3 + x^2y - xy^2 - y^3)(x + y) \sin(2z) dx dy dz$$

ove si abbiamo definito $Q \subset \mathbb{R}^3$ come l'insieme dei punti (x, y, z) tali che

$$0 < z < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < x + y < \min \left\{ \frac{1}{\cos z}, \frac{1}{\sin z} \right\} \quad \text{e} \quad 0 < x - y < 1.$$

Suggerimento: considerare il cambio di variabile $u = (x + y)$ e $v = (x - y)$.

25. Si provi l'integrabilità di

$$f(x, y) = \frac{xy + y^2}{2 + x + y}$$

sull'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 1, x + y \geq -1\}$. Utilizzando il cambio di coordinate

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y \end{cases}$$

si calcoli $\int_D f$.

26. Si considerino la funzione

$$f_\alpha(x, y, z, t) = \frac{(z^2 - x^2 - y^2)^\alpha}{t^2} \log \left(\frac{1}{z} \right)$$

ed $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < z < 1, t^2 + x^2 + y^2 > z^2, t > 0\}$. Al variare di α in \mathbb{R} si calcoli $\int_A f_\alpha \in [0, +\infty]$.

27. (**Avanzato**) Consideriamo l'insieme

$$A = \{(x, y, u, v, z) \in \mathbb{R}^5 \mid x^2 + y^2 \leq u^2 + v^2 + z^2 \leq (x^2 + y^2)^{1/3}\}.$$

Si determinino gli α reali tali che

$$f_\alpha(x, y, u, v, z) = z (z^2 + u^2 + v^2)^\alpha$$

sia integrabile in A e per tali valori si calcoli $\int_A f_\alpha$.

28. (**Svolto**) Si consideri l'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1 \text{ e } y^2 + z^2 \leq 1\}$$

e la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2z - z^2 - y^2}}.$$

Si osservi che f è ben definita su A e si calcoli $\int_A f(x, y, z) dx dy dz$.

Soluzione. Osserviamo che se $(x, y, z) \in A$, allora la prima disequazione implica $z \geq 0$, mentre la seconda implica $|z| \leq 1$, concludiamo quindi che deve essere $0 \leq z \leq 1$. Inoltre per tali punti abbiamo

$$0 \leq x^2 \leq 1 - (z - 1)^2 - y^2 = 2z - z^2 - y^2,$$

pertanto f è ben definita. Per il Teorema di Tonelli abbiamo

$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_{A_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

Fissato $z \in [0, 1]$, si ha

$$y^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2z - z^2 \quad \text{e} \quad y^2 \leq 1 - z^2,$$

pertanto definendo $\varphi(z) = \min\{1 - z^2, 2z - z^2\}$ ne risulta che

$$|y| \leq \sqrt{\varphi(z)}.$$

Concludiamo pertanto che

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{\varphi(z)}}^{\sqrt{\varphi(z)}} \left(\int_{(A_z)_y} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{\varphi(z)}}^{\sqrt{\varphi(z)}} \left(\int_{\{x: |x| \leq \sqrt{2z - z^2 - y^2}\}} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz \end{aligned}$$

e abbiamo

$$\int_{\{x: |x| \leq \sqrt{2z - z^2 - y^2}\}} \frac{1}{\sqrt{2z - z^2 - y^2}} dx = 2.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_A f &= 4 \int_0^1 \min\{\sqrt{1 - z^2}, \sqrt{2z - z^2}\} dz \\ &= 4 \int_0^{1/2} \sqrt{2z - z^2} dz + 4 \int_{1/2}^1 \sqrt{1 - z^2} dz. \end{aligned}$$

Consideriamo la traslazione $z = x + 1$, ottenendo

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \sqrt{2z - z^2} dz &= \int_{-1}^{-1/2} \sqrt{1 - x^2} dx \\ &= \int_{1/2}^1 \sqrt{1 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Questo offre

$$\int_A f = 8 \int_{1/2}^1 \sqrt{1 - z^2} dz.$$

Con il cambio di variabile $z = \sin t$ si ha

$$\int_{1/2}^1 \sqrt{1-z^2} dz = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + \cos(2t)) dt = \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Concludiamo che $\int_A f = \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right)$. □

29. Utilizzare il teorema di Tonelli per provare che se $f : E \rightarrow [0, +\infty]$ è misurabile, allora

$$\begin{aligned} \int_E f(x) dx &= m_{n+1}(\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in E, 0 \leq t \leq f(x)\}) \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbf{m}_n(\{x \in E : f(x) \geq t\}) dt. \end{aligned}$$

30. Ponendo $\omega_n = \mathbf{m}_n(B(0, 1))$, ove $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, provare che

$$\int_{B_n(0,r)} \frac{1}{|x|^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{n\omega_n r^{n-\alpha}}{n-\alpha} & \text{se } \alpha < n \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq n \end{cases}.$$

Sugg. Usare l'esercizio precedente con

$$E = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < |x| < r, 0 \leq t \leq |x|^{-\alpha}\},$$

che corrisponde al sottografico della funzione $x \rightarrow |x|^{-\alpha}$.

31. Ragionando come nell'esercizio precedente, provare che

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \frac{1}{|x|^\alpha} dx dy = \begin{cases} \frac{n\omega_n r^{n-\alpha}}{(\alpha-n)} & \text{se } \alpha > n \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq n \end{cases}.$$