Programma d'esame di

Analisi Matematica II e Complementi di Analisi Matematica

per i corsi di laurea triennale in Ingegneria Chimica ed Ingegneria dell'Energia

Anno Accademico 2017/2018

Analisi Matematica II

(1) `Topologia di` $\mathbb{R}^n$

(a) Distanza euclidea, prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Successioni e loro limiti in $\mathbb{R}^n$. Nozioni di insiemi aperto, insieme chiuso, chiusura di un insieme per successioni e loro proprietà. Punti di accumulazione, isolati, e di frontiera. Parte interna e frontiera di un insieme in $\mathbb{R}^n$. Insiemi connessi e connessi per archi. Insiemi compatti in $\mathbb{R}^n$ definiti per successioni e loro caratterizzazione come insiemi chiusi e limitati.

(b) Limiti di più variabili reali in punti di $\mathbb{R}^n$ e all'infinito, loro caratterizzazione per limiti di successioni, unicità, operazioni tra limiti, teorema del confronto e teoremi di permanenza del segno. Funzioni continue e operazioni elementari tra funzioni continue. Teorema di Weierstrass, massimi e minimi globali su insiemi illimitati e chiusi. L'immagine reale e continua di un insieme connesso per archi è un intervallo di $\mathbb{R}$.

(2) `Differenziabilità per funzioni di più variabili reali`

(a) Derivata parziale e derivata direzionale, funzioni lineari, base duale e spazio duale di $\mathbb{R}^n$ e nozione di differenziale di funzioni reali e vettoriali di più variabili reali. Gradiente di funzione reale, relazione tra differenziale, gradiente, derivate direzionali e parziali (con dimostrazione). La continuità è conseguenza dalla differenziabilità (con dimostrazione). La continuità delle derivate parziali implica la differenziabilità. Punti critici e annullamento delle derivate direzionali nei punti di massimo o di minimo locale (con dimostrazione).

(b) Derivate parziali di ordine superiore, classi di funzioni $C^k(\Omega)$, differenziale secondo, teorema di Schwarz e formula di Taylor al secondo ordine con resto di Peano per funzioni in $C^2(\Omega)$. Matrici simmetriche e loro positività, matrice hessiana e criterio di Sylvester. Condizioni sufficienti per l'esistenza di massimi o di minimi locali (con dimostrazione), punti di sella. Differenziabilità e differenziale di funzioni vettoriali e matrice jacobiana.

(c) Differenziabilità della composizione di funzioni vettoriali differenziabili. Definizione di matrice jacobiana e formula per il calcolo della matrice jacobiana di una composizione di funzioni differenziabili. Sistemi di coordinate sferiche, cilindriche, polari e loro matrice jacobiana.

(3) `Integrali curvilinei, campi vettoriali, 1-forme differenziali e potenziali`

(a) Curve C^1 a tratti in $\mathbb{R}^n$ e formula di calcolo per la loro lunghezza. Integrale curvilineo di prima specie, ovvero per funzione scalare e sua invarianza per cambio di parametrizzazione della curva (con dimostrazione).

(b) Nozione di 1-forma differenziale chiusa, esatta e sua primitiva. Campo vettoriale irrotazionale, conservativo e suo potenziale. Campo vettoriale radiale. Integrali curvilinei di seconda specie, ovvero per 1-forme differenziali o per campi vettoriali. Invarianza di tale integrale per cambio di parametrizzazione, a meno del verso di percorrenza della curva (con dimostrazione). Corrispondenza tra campi vettoriali e 1-forme differenziali.

(c) Caratterizzazione delle 1-forme differenziali esatte con l'annullamento del loro integrale curvilineo lungo tutte le curve chiuse C^1 a tratti e tramite l'invarianza del loro integrale curvilineo su curve C^1 a tratti che abbiano gli stessi estremi iniziali e finali (con dimostrazione).

Costanza delle funzioni C^1 con gradiente ovunque nullo su un aperto connesso per archi (con dimostrazione).

(d) Curve omotope ad un punto, insiemi semplicemente connessi ed esempi. Caratterizzazione di campi conservativi e di 1-forme differenziali esatte su aperti semplicemente connessi.

(4) `Integrazione secondo Lebesgue`

(a) Misura di Lebesgue, sue proprietà di monotonia, subadditività finita e numerabile. Insiemi misurabili secondo Lebesgue. Insiemi trascurabili e proprietà quasi ovunque. Operazioni insiemistiche finite e numerabili su insiemi misurabili. Additività numerabile della misura di Lebesgue. Esistenza di insiemi non misurabili.

(b) Funzioni misurabili secondo Lebesgue: le funzioni continue su un insieme misurabile sono misurabili (con dimostrazione). Combinazioni lineari e prodotti di funzioni misurabili, ove ben definiti, sono misurabili. Funzioni semplici, integrale di Lebesgue e funzioni integrabili secondo Lebesgue.

(c) Le funzioni integrabili secondo Riemann sono integrabili secondo Lebesgue. Le funzioni misurabili e limitate su un insieme di misura finita sono integrabili (con dimostrazione). Relazione tra integrabilità secondo Riemann in senso improprio e integrabilità secondo Lebesgue. Teorema di Tonelli e teorema di Fubini. Teoremi di cambiamento di variabile per funzioni sommabili e per funzioni misurabili non negative.

(5) `Misura di area ed elementi di Analisi Vettoriale`

(a) Jacobiano di una mappa da un aperto di $\mathbb{R}^2$ ad $\mathbb{R}^3$, formula per la misura di area in $\mathbb{R}^3$ di insiemi parametrizzati. Integrale di superficie di funzioni continue su insiemi parametrizzati. Cenni all'esistenza di una misura 2-dimensionale in $\mathbb{R}^3$ che estende le nozioni di area e di integrale superficiale.

(b) Grafici in $\mathbb{R}^3$, punti 2-regolari, superfici regolari, vettori normali e spazi tangenti. Punti di frontiera regolari, singolari e normale esterna per aperti di $\mathbb{R}^3$. Formula per il campo vettoriale normale ad un grafico.

(c) Aperti regolari e loro orientazione positiva del bordo, teorema di Gauss-Green, 1-forme differenziali d'area, prodotto vettoriale, sue proprietà algebriche e geometriche e rotore di un campo vettoriale.

(d) Domini piani elementari, superfici elementari, superfici regolari a tratti, flussi di campi vettoriali rispetto a superfici, o σ-misurabili e teorema della divergenza nello spazio. Superfici parametrizzate e relativo flusso di campi vettoriali, superfici parametrizzate elementari con bordo, loro orientazione del bordo e orientazione del bordo per superfici regolari a tratti coerentemente orientate. Teorema di Stokes sia per superfici parametrizzate elementari con bordo che per superfici regolari a tratti coerentemente orientate.

Complementi di Analisi Matematica

(1) `Varietà in` $\mathbb{R}^n$ `e moltiplicatori di Lagrange`

(a) Funzione definente, punto k-regolare e superficie di dimensione k in $\mathbb{R}^n$.

(b) Teorema della mappa implicita per funzioni vettoriali.

(c) Definizioni equivalenti di k-superfici in $\mathbb{R}^n$ e parametrizzazioni locali. Spazio tangente di una k-superficie di $\mathbb{R}^n$ in un punto, sia come nucleo di mappa lineare, che come immagine di mappa lineare, ovvero in forma parametrica.

(d) Punti critici di funzioni reali su k-superfici di $\mathbb{R}^n$ e loro caratterizzazione con i moltiplicatori di Lagrange. I punti di massimo e di minimo locali di funzioni in punti regolari del loro dominio sono critici (con dimostrazione).

(2) `Equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie`

(a) Funzioni localmente lipschitziane in y ed uniformemente in t, teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy. Soluzioni massimali, loro unicità, teorema di abbandono dei compatti e teorema di estensione globale. Casi di non unicità delle soluzioni e teorema di sola esistenza di Peano, per campi di velocià continui.
(b) Studi qualitativi di equazioni differenziali del primo ordine ed equazioni differenziali a variabili separabili.
(c) Sistemi lineari a coefficienti continui. Struttura dell'insieme delle soluzioni per il caso omogeneo e non omogeneo. Problema di Cauchy per equazioni lineari di ordine n e sua caratterizzazione come speciale sistema lineare del primo ordine. Struttura delle soluzioni per equazioni lineari di ordine n sia nel caso omogeneo che non omogeneo, nozione di integrale generale. Base esplicita di soluzioni per equazioni differenziali lineari omogenee di ordine n a coefficienti costanti. Soluzione particolare quando il termine omogeneo è il prodotto di un polinomio per un esponenziale. Soluzione particolare nel caso generale, tramite variazione delle costanti.
(d) Norma di Frobenius e spazio di Banach delle matrici quadrate. Matrice esponenziale e soluzione di un sistema lineare a coefficienti costanti, sia omogeneo che non omogeneo. Matrice esponenziale definita da n soluzioni di n problemi di Cauchy (con dimostrazione). Speciali soluzioni di sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti tramite autovettori e autovalori della matrice (con dimostrazione). Polinomio caratteristico di una matrice quadrata complessa e autospazi generalizzati. Forma generale per una base di soluzioni di un qualunque sistema di equazioni differenziali lineare omogeneo e a coefficienti costanti.
(e) Sistemi autonomi di equazioni differenziali non lineari e proprietà delle loro soluzioni. Punti di equilibrio di sistemi autonomi: stabili, instabili e asintoticamente stabili. Caratterizzazione della stabilità, stabilità asintotica e instabilità per un qualunque sistema lineare omogeneo di equazioni differenziali a coefficienti costanti. Teorema di stabilità per i punti di equilibrio di sistemi non lineari.

(3) `Successioni e serie di funzioni`

(a) Convergenza puntuale, puntuale assoluta, uniforme e totale per successioni e per serie di funzioni. Limiti uniformi di successioni di funzioni continue sono continui (con dimostrazione). Caratterizzazione della convergenza uniforme per una serie di funzioni (con dimostrazione). La convergenza totale di una serie di funzioni implica sia la convergenza puntuale assoluta che la convergenza uniforme (con dimostrazione). Condizione necessaria per una successione di funzioni continue su $E \subset \mathbb{R}^n$ e che converge uniformemente su $A \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\overline{A} = E$.
(b) Scambio del limite con l'integrale per una successione di funzioni continue uniformemente convergente (con dimostrazione), condizioni per la derivazione termine a termine per una serie di funzioni reali e derivabili.
(c) Limite superiore di una successione reale. Serie di potenze reali e complesse e loro raggio di convergenza. Teorema del raggio di convergenza (con dimostrazione).

(4) `Serie di Fourier`

(a) Proprietà delle funzioni T-periodiche e funzioni periodiche localmente sommabili. Serie di Fourier reale, serie di Fourier complessa e loro relazione (con dimostrazione). Relazioni di ortogonalità per funzioni trigonometriche reali e per l'esponenziale complesso.
(b) Funzioni p-sommabili e quadrato sommabili su un intervallo, funzioni uguali a meno di insiemi trascurabili, prodotto scalare e norma quadratica in $\mathcal{L}^2(a, b)$. Basi ortonormali e convergenza di serie di funzioni in $\mathcal{L}^2(a, b)$. Periodizzate e spazio delle funzioni periodiche localmente

quadrato sommabili $\mathcal{L}^2_T(\mathbb{R})$. Sviluppo in serie di Fourier in $\mathcal{L}^2_T(\mathbb{R})$ come rappresentazione di un vettore rispetto ad una base infinita di funzioni trigonometriche, ove il vettore è una qualunque funzione di $\mathcal{L}^2_T(\mathbb{R})$, con $T = b - a$. Formula di Parseval.

(c) Spazio delle funzioni T-periodiche, localmente sommabili e opportunamente derivabili $\mathcal{P}_{d,T}$ le cui serie di Fourier convergono puntualmente ovunque. Condizioni di convergenza della serie di Fourier per funzioni periodiche e derivabili e derivabilità "termine a termine" della serie di Fourier (con dimostrazione).

(5) `Funzioni olomorfe`

(a) Derivata complessa e proprietà elementari per le combinazioni lineari complesse, prodotti e composizioni. Funzioni olomorfe e caratterizzazione della derivazione complessa con le equazioni di Cauchy-Riemann (con dimostrazione). Integrale complesso: cambiamento di variabile nella parametrizzazione della curva e integrazione di funzioni aventi primitiva olomorfa (con dimostrazione).

(b) Formula di Cauchy per funzioni olomorfe. Derivabilità complessa delle serie di potenze complesse e formula di derivazione complessa (con dimostrazione). Funzioni analitiche, analiticità delle funzioni olomorfe e formula locale di sviluppo in serie di potenze (con dimostrazione). Singolarità isolate, sviluppo di Laurent e teorema dei residui.

Suggerimenti e indicazioni bibliografiche

Gli argomenti del corso non seguono un testo specifico, è preferibile pertanto riferirsi alle lezioni. Tuttavia i vari argomenti trattati, con possibile diversità di presentazione, si possono trovare in diversi testi universitari per i corsi di Analisi Matematica, tra i quali si segnalano ad esempio i seguenti.

G. De Marco, *Analisi due. Teoria ed esercizi*, Zanichelli - Decibel, 1999

N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica due*, Liguori, 1996

C. D. Pagani, S. Salsa, *Analisi Matematica, Volume 2*, Masson, 1998

M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, *Analisi Matematica 2*, Zanichelli, 2009

Ulteriore materiale sulle funzioni olomorfe si può trovare anche nel testo di G. Gilardi, *analisi tre*, McGraw-Hill, 1994. Per la preparazione negli esercizi relativi al corso, oltre al materiale fornito nelle esercitazioni e nei fogli supplementari di esercizi, si segnalano ad esempio i seguenti testi.

G. De Marco, C. Mariconda, *Esercizi di Analisi due*, Zanichelli - Decibel, 1998

P. Marcellini, C. Sbordone, *Esercizi di matematica*, Volume II, Tomi 1,2,3,4, Liguori, 2009

M. Bramanti, *Esercitazioni di Analisi Matematica 2*, Esculapio, 2012

Prof. Valentino Magnani
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
Largo Bruno Pontecorvo 5, I-56127
email: valentino.magnani@unipi.it