Complementi di Analisi Matematica. Foglio di esercizi n.10
4/5/2018
(Aggiornamento del 7/5/2018)

`Esercizi su serie di funzioni`

Esercizio 1 Definita $g_k(x) = e^{-kx^2}$, provare che $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge puntualmente alla funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases} .$$

Stabilire se g_k converge uniformemente a g su $\mathbb{R}$, su $(-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ con $\delta > 0$ e su $\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]$.

Esercizio 2 Consideriamo $f_k(x) = \dfrac{x^4}{k + x^2}$. Studiare la convergenza di f_k puntuale ed uniforme su $\mathbb{R}$ e la convergenza uniforme sugli insiemi limitati.

Esercizio 3 Provare che $f_k(x) = \left(1 - \dfrac{x}{k^2}\right)^k$

1. converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione costante $g(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,
2. converge uniformemente a g su ogni insieme limitato di $\mathbb{R}$,
3. non converge uniformemente a g su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4 Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n(x) = e^{-n^\beta x^2}.$$

Al variare di $\beta > 0$ studiare

1. la convergenza puntuale e uniforme su $\mathbb{R}$,
2. la convergenza uniforme e totale su $(0, \delta)$ e $(-\delta, 0)$ per $\delta > 0$,
3. la convergenza uniforme e totale su $(\delta, +\infty)$ e su $(-\infty, -\delta)$ per $\delta > 0$.

Esercizio 5 Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-n^\beta x^2}.$$

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$

1. determinare l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ di convergenza puntuale e studiare la convergenza uniforme su A,
2. stabilire se c'è convergenza uniforme e totale su $(-\delta, 0)$ e $(0, \delta)$ per $\delta > 0$,
3. studiare la convergenza uniforme e totale su $(\delta, +\infty)$ e $(-\infty, -\delta)$ per $\delta > 0$.

Esercizio 6 Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

1. Determinare l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ di convergenza puntuale.
2. Stabilire se f_n converge uniformemente sugli insiemi limitati contenuti in A
3. Stabilire se f_n converge uniformemente su A.

Esercizio 7 Determinare il più grande insieme $A \subset \mathbb{R}$ di convergenza puntuale per la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^2} a_n x^n$, dove abbiamo definito

$$a_n = \begin{cases} 2/n & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}.$$

Studiare la convergenza uniforme e totale su A e su $A \cap (-1/2, 1/2)$.

Esercizio 8 Si consideri la serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan(kx)}{1 + k^2 - k^2 \sin x}$.

1. Determinare l'insieme più grande $A \subset \mathbb{R}$ dove la serie converge puntualmente.
2. Stabilire se la serie converge uniformemente su $\left(-\frac{5}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right)$.
3. Dato $\varepsilon \in (0, 2\pi)$ e definito $\left(-\frac{3\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie su tale insieme.
4. Stabilire se la serie converge uniformemente su $(0, \pi/2)$ e studiare la convergenza uniforme su A, di cui al primo punto.

Esercizio 9 Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(kx) + kx + \frac{x^2}{k}}{k^3 + \log k}.$$

Determinare l'insieme di convergenza puntuale $A \subset \mathbb{R}$ e l'insieme di convergenza puntuale assoluta. Studiare su tali insiemi la convergenza uniforme e totale. Dato $B \subset [-\pi, \pi]$, stabilire se la serie converge uniformemente su B.

Esercizio 10 Determinare l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ ove la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(x)}{|x|^{\log(n)} + 1}$$

è ben definita e converge puntualmente. Studiare la convergenza uniforme e totale su A.

Esercizio 11 Scrivere l'insieme di convergenza puntuale $A \subset \mathbb{R}$ per la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1+x)^n \operatorname{arctg}[(1+x)^n].$$

Determinare inoltre l'insieme di convergenza puntuale assoluta $B \subset \mathbb{R}$. Stabilire se la serie converge uniformemente e totalmente sia su A che su B. Determinare l'intervallo di derivabilità della serie di funzioni e se esiste, scriverne la derivata come nuova serie di funzioni.

Esercizio 12 Si consideri la serie di funzioni complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, i^n \, z^n.$$

Scrivere l'insieme di convergenza puntuale $A \subset \mathbb{C}$ e l'insieme di convergenza puntuale assoluta $B \subset A$. Stabilire se la serie converge uniformemente e totalmente sugli insiemi A e B.

Esercizio 13 Stabilire se la serie di funzioni complesse

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2+i)^n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \frac{n!}{(2n)!} \, z^n$$

converge totalmente sui compatti di $\mathbb{C}$.

Esercizio 14 Determinare l'insieme di convergenza puntuale per la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2} n!}{7^n n^n} x^n$$

e stabilire se ivi si ha convergenza uniforme

Esercizio 15 Sia data la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n n^e (\sin x)^n$. Determinare l'insieme di convergenza puntuale e studiare la convergenza uniforme e totale su tale insieme.

Esercizio 16 Siano date rispettivamente le serie di potenze complessa e reale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{2^{4n}+1} z^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{3^{2n}+1} x^n.$$

1. Determinare i raggi di convergenza delle due serie di potenze.

2. Determinare gli insiemi di convergenza puntuale e puntuale assoluta per le due serie.

3. Studiare la convergenza uniforme sugli insiemi definiti al punto precedente.

Esercizio 17 Data $\sum_{k=0}^{\infty}[5(-1)^n+2]^n x^n$, si studi la convergenza puntuale, uniforme e totale su tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Esercizio 18 Siano $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)^n \frac{z^n}{n^4}$ serie di potenze complessa e $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(3-\frac{1}{n}\right)^n x^n$ serie di potenze reale.

1. Determinare i raggi di convergenza di tali serie di potenze e i rispettivi insiemi di convergenza puntualle, rispettivamente in $\mathbb{C}$ ed in $\mathbb{R}$.

2. Studiare la convergenza totale ed uniforme negli insiemi di convergenza puntuale individuati al punto precedente.

Esercizio 19 Sia data la serie di funzioni complesse $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{1+n^2}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{z^{3n}}$. Determinare gli insiemi di convergenza puntuale e di convergenza puntuale assoluta.

Esercizio 20 Si consideri la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty}[1+(-1)^n(1+i)^n]z^n$.

1. Determinare l'insieme di convergenza puntuale, ivi studiandone la convergenza uniforme e totale.

2. Si determini una famiglia numerabile di insiemi $A_n \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, non vuoti e distinti tali che la serie ivi converga totalmente e A_n contenge infiniti elementi per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 21 Data la serie di potenze complessa

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(-1)^n+(1+i)^{(-1)^n n}]z^n,$$

determinare l'insieme di convergenza puntuale ed ivi studiarne le convergenza uniforme.

Esercizio 22 Data la serie di potenze complessa $\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$, determinarne l'insieme di convergenza puntuale assoluta ed ivi studiarne la convergenza totale.

Esercizio 23 Determinare gli insiemi di convergenza puntuale e puntuale assoluta per la serie di potenze complessa

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k^2+\log k}\, z^{2k}.$$

Stabilire se si può avere la convergenza uniforme e totale sugli insiemi indicati in precedenza.

Esercizio 24 Sia data la serie di potenze complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1+(-1)^n(1+i)]^n}{n^2}z^n.$$

1. Determinare l'insieme di convergenza puntuale $A \subset \mathbb{C}$.

2. Studiare sia la convergenza uniforme che la convergenza totale su A.

Esercizio 25 Determinare l'insieme di convergenza puntuale per la serie di potenze complesse

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}} z^n.$$

Studiare la convergenza uniforme su tale insieme.

Risoluzione. Dalla Proposizione 1 sappiamo che esiste una successione crescente n_k di interi tale che $cos(n_k) \to 1$ ed in particolare si avrà

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[n_k]{|\cos n_k|}}{(\sqrt[n_k]{n_k})^{1/2}} = 1,$$

da cui segue che il raggio unitario è unitario. Consideriamo i punti u di $\partial B(0,1)$. Per applicare il criterio di Abel-Dirichlet basta osservare la limitatezza delle somme

$$\sum_{n=1}^{m} (\cos n) u^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} (e^{in} + e^{-in}) u^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} (e^i u)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} (e^{-i} u)^n$$

pertanto tale somma è limitata se e solo se $u \neq e^{\pm i}$. Nel caso in cui $u = e^i$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^{m} (\cos n) e^{in} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} (e^{2in} + 1) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} e^{2in} + \frac{m}{2} \to \infty$$

essendo il primo addendo costituito da una successione complessa convergente. Si ragiona analogamente per $u = e^{-i}$, concludendo che l'insieme di convergenza è

$$\mathbb{B}(0,1) \setminus \left\{ e^{\pm i} \right\}.$$

Su tale insieme non può esservi convergenza uniforme, altrimenti si estenderebbe anche alla chiusura $\mathbb{B}(0,1)$, dove vi sono punti di non convergenza.

Esercizio 26 Sia data la serie di potenze reali $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} x^n$.

1. Determinare l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ di convergenza puntuale.

2. Studiare la convergenza uniforme e totale su A.

Suggerimento. Si utilizzi la Proposizione 1.

Esercizio 27 Sia data la serie di funzioni complesse

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{z}\right)^n.$$

Determinare l'insieme di convergenza puntuale e stabilire se vi è convergenza totale. Determinare infine una famiglia infinita di insiemi aperti dove la serie converge totalmente.

Esercizio 28 Per $T > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare la serie di Fourier della periodizzata di

$$[0,T) \ni t \to e^{\alpha t}.$$

Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier converge uniformemente sul suo insieme di convergenza puntuale. Dedurre il calcolo esplicito della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+k^2)}.$$

Esercizio 29 Calcolare la serie di Fourier della 2-periodizzata di

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -1 \leq t < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 \leq t < 1 \end{cases}.$$

Quindi per ogni $t \in (0,1)$ calcolare il valore della serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\pi t)}{(2k+1)}.$$

Esercizio 30 Si consideri la funzione 2π-periodizzata $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della funzione

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{on } [-\pi, 0) \\ -x & \text{on } [0, \pi) \end{cases}$$

su $[-\pi, \pi)$. Si calcoli la serie di Fourier data di f, determinandone il valore in tutti i punti di $\mathbb{R}$. Si calcoli infine la serie numerica:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2k)^2}.$$

Esercizio 31 Si consideri la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}x) & \text{on } [0, 1) \\ 1 & \text{on } [1, 2) \end{cases}$$

definita su $[0,2)$ e si consideri la sua 2-periodizzata $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di g. Si calcoli la serie di Fourier data di f, determinandone il valore in tutti i punti di $\mathbb{R}$. Si calcoli infine la serie numerica:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-4^2k^2}.$$

converge a un numero positivo o a un numero negativo.

Esercizio 32 Si consideri la $\pi/2$-periodizzata $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della funzione $g(x) = \sin(x)$ definita su $[0, \pi/2)$. Si calcoli la serie di Fourier di f e si stabilisca se tale serie di funzioni converge uniformemente su $(0, \pi/2)$.

Proposizione 1 *Per ogni $\lambda \in [-1, 1]$ possiamo avere una successione $n_k \in \mathbb{N}$ strettamente crescente e tale che $\cos n_k \to \lambda$ per $k \to \infty$.*

Dimostrazione. Consideriamo $\lambda \in [-1, 1]$ e $b \in (0, 2\pi]$, tali che $\lambda = \cos b$. Dal teorema di approssimazione di Dirichlet, fissato arbitrariamente un intero positivo N, esistono due interi n_0 ed m_0 primi tra loro, con $1 \leq m_0 \leq N$, tali che

$$\left| 2\pi - \frac{n_0}{m_0} \right| \leq \frac{1}{m_0 N},$$

in quanto 2π è un numero irrazionale. Poiché $\pi > 0$ avremo anche $n_0 > 0$. Quindi fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$ possiamo scegliere $N^{-1} < \varepsilon$, e quindi trovare

$$|2\pi m_0 - n_0| \leq N^{-1} < \varepsilon.$$

Denotiamo con $k \geq 0$ la parte intera di $b/|n_0 - 2m_0\pi|$, quindi

$$k \leq \frac{b}{|n_0 - 2m_0\pi|} < k + 1.$$

Ne segue che

$$0 \leq b - k|n_0 - 2m_0\pi| < |n_0 - 2m_0\pi| < \varepsilon$$

e per la 1-lipschitzianità di $\cos x$, ovvero

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, ne segue che

$$|\lambda - \cos(k|n_0 - 2m_0\pi|)| = |\cos b - \cos(k|n_0 - 2m_0\pi|)| < \varepsilon.$$

Per la parità e la 2π-periodicità della funzione coseno segue che

$$|\lambda - \cos(kn_0)| < \varepsilon.$$

Gli interi k e n_0 dipendono da ε. Assumendo di aver considerato $\varepsilon = e^{-1}$, potremo quindi trovare ripetendo il ragionamento un nuovo intero n' positivo, tale che

$$|\lambda - \cos(n')| < \min\{|\lambda - \cos(kn_0)|, e^{-2}\} \leq e^{-2}$$

in modo che si abbia anche $n' \neq kn_0$. Ripetendo tale argomento si ottiene un'infinità numerabile di interi positivi tutti distinti tra loro n_j tale che

$$|\lambda - \cos n_j| < e^{-j}$$

per ogni $j \geq 1$. Possiamo quindi estrarne una sottosuccessione strettamente crescente n_{j_k} tale che $\cos n_{j_k} \to \lambda$.