Complementi di Analisi Matematica. Foglio di esercizi n.9
18/4/2018

`Esercizi su sistemi di equazioni differenziali`

Esercizio 1 Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_2 - y_1 \\ \dot{y}_2 = y_2 - 2y_1 \end{cases} .$$

1. Determinare una base di soluzioni.
2. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.
3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_2 - y_1 \\ \dot{y}_2 = y_2 - 2y_1 \\ y_1(-1) = 0 \\ y_2(-1) = 2 \end{cases} .$$

Esercizio 2 Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + 5y_2 \\ \dot{y}_2 = -2y_2 + y_1 \end{cases} .$$

1. Trovare tutte le soluzioni del sistema, ovvero una sua base di soluzioni.
2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + 5y_2 \\ \dot{y}_2 = -2y_2 + y_1 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 2 \end{cases} .$$

3. Determinare la matrice esponenziale e^A, dove abbiamo definito

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

4. Classificare i punti di equilibrio tra stabili, instabili o asintoticamente stabili.
5. Tracciare un grafico qualitativo delle orbite del sistema, assieme ai versi di percorrenza.

Esercizio 3 Consideriamo

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_2 - y_1 \\ \dot{y}_2 = -y_2 - 2y_1 \end{cases}$$

1. Determinare una base di soluzioni.
2. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.
3. Tracciare un grafico qualitativo delle orbite evidenziando i versi di percorrenza.

Esercizio 4 Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_2 - y_1 \\ \dot{y}_2 = y_2 - 2y_1 \end{cases} .$$

1. Trovare una base di soluzioni del sistema.
2. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.
3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_2 - y_1 \\ \dot{y}_2 = y_2 - 2y_1 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = -1 \end{cases} .$$

Esercizio 5 Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 - 2y_2 \\ \dot{y}_2 = y_2 \end{cases} .$$

1. Risolvere la seconda equazione, sostituendola nella prima, quindi determinare una base di soluzioni del sistema.
2. Determinare l'autovettore relativo alla radice caratteristica del sistema e tracciare un grafico qualitativo di tutte le soluzioni.
3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 - 2y_2 \\ \dot{y}_2 = y_2 \\ y_1(10) = -10 \\ y_2(10) = 11 \end{cases}$$

Esercizio 6 Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x' = & 3x - y + z \\ y' = & 2x + z \\ z' = & x - y + 2z \end{cases} .$$

Determinare una base di soluzioni, i punti di equilibrio e studiarne la loro stabilità.

Esercizio 7 Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x' = & 5x - 3y + 2z \\ y' = & 6x - 4y + 4z \\ z' = & 4x - 4y + 5z \end{cases} .$$

1. Determinare una base di soluzioni.
2. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio.

Esercizio 8 Determinare tutti i punti di equilibrio del seguente sistema

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y + 2z + 4z^2 \\ z' = -\dfrac{y}{2} + 3z \end{cases} \tag{1}$$

e studiare la loro stabilità.

Esercizio 9 Determinare tutti i punti di equilibrio del seguente sistema

$$\begin{cases} x' = & x^2 + x \\ y' = & x - y \\ z' = & 3x - z \end{cases}$$

e studiare la loro stabilità.

Esercizio 10 Determinare tutti i punti di equilibrio del seguente sistema

$$\begin{cases} x' = & y - x \\ y' = & \cos(x) \end{cases}$$

e studiare la loro stabilità. Tracciare poi un grafico qualitativo delle orbite in un intorno sufficientemente piccolo dei punti di equilibrio, evidenziandone i versi di percorrenza.

Esercizio 11 Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = y_2 - y_3 \\ \dot{y}_3 = -y_2 + y_3 \end{cases} .$$

1. Determinare una base di soluzioni.
2. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

Esercizio 12 Consideriamo il sistema non-lineare

$$\begin{cases} x' = & y + \sin t \\ y' = & x - 1 \end{cases} .$$

Determinare l'integrale generale del sistema, ovvero tutte le soluzioni parametrizzate rispetto due valori reali.

Esercizio 13 Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = & y - 3 \\ y' = & 2x + 2 \end{cases} .$$

1. Trovare tutte le soluzioni del sistema.
2. Tracciare il grafico qualitativo di tutte le orbite delle soluzioni.
3. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio.

Suggerimento. Fare il cambiamento di variabile $y_1 = x + 1$ e $y_2 = y - 3$, ottenendo un sistema lineare nelle nuove variabili.