Complementi di Analisi Matematica. Foglio di esercizi n.8
18/04/2018

`Esercizi su equazioni differenziali`

Esercizio 1 Tracciare i grafici qualitativi delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = e^y(y^3 + 1),$$

evidenziando in particolare i punti di equilibrio e studiandone la loro stabilità. Stabilire inoltre se esistono soluzioni massimali definite su $\mathbb{R}$ e se esistono soluzioni non estendibili su $\mathbb{R}$.

Esercizio 2 Tracciare i grafici qualitativi delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = y^3 - 16y$$

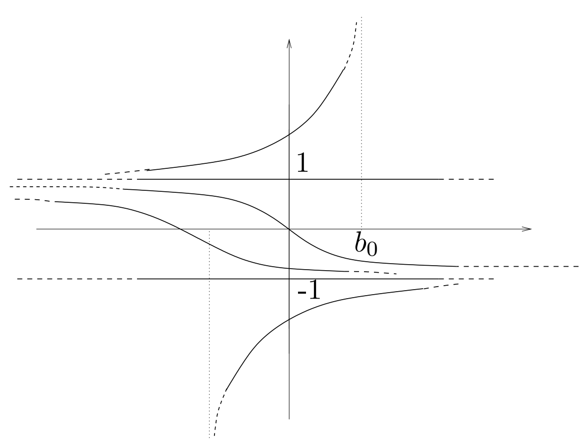
evidenziando in particolare i punti di equilibrio. Si determinino quelli stabili e quelli instabili.

Esercizio 3 Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = e^{t^2}(y^2 - 1)\,.$$

1. Determinare le aree di crescenza e di decrescenza dei grafici delle soluzioni.
2. Determinare tutti i punti di equilibrio, se esistono, e studiarne in tal caso la stabilità.
3. Determinare tutte le soluzioni massimali definite su $\mathbb{R}$, se esistono, ed in tal caso studiare l'esistenza dei limiti a $+\infty$, a $-\infty$ e nel caso determinarli.
4. Stabilire se esiste almeno una soluzione dispari.
5. Stabilire se esistono soluzioni massimali non definite su $\mathbb{R}$.

Suggerimento: Si osservi il grafico qualitativo delle soluzioni.



Esercizio 4 Nell'esercizio precedente determinare una formula integrale per la soluzione in funzione dei dati iniziali. Si utilizzi tale formula per verificare i risultati dello studio qualitativo richiesto in tale esercizio.
Suggerimento: Si utilizzi la risoluzione per separazione delle variabili.

Esercizio 5 Si consideri l'equazione differenziale

$$\dot{y} = e^y - t^2 \,. \tag{1}$$

1. Stabilire se esistono soluzioni estendibili su $\mathbb{R}$.

2. Provare che tutte le soluzioni si estendono illimitatamente a sinistra.

Esercizio 6 Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + |y| \sin t = |\sin t| \\ y(\pi/2) = 0 \end{cases} .$$

nell'intervallo $[0, 3\pi/2]$ e stabilire se è possibile estendere tale soluzione su $\mathbb{R}$.

Esercizio 7 Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \max\left\{\sqrt{|y(t)|}, y(t)^2\right\} \\ y(0) = -1 \end{cases} . \tag{2}$$

1. Provare la non unicità delle soluzioni massimali, determinando il più grande intervallo dove la soluzione del problema è unica.

2. Stabilire se esistono soluzioni estendibili su $[0, +\infty)$.

3. Stabilire se esistono soluzioni definite su $\mathbb{R}$.

4. Stabilire se esistono soluzioni che non siano estendibili su $[0, +\infty)$.

5. Stabilire se esistono soluzioni della sola equazione differenziale $y' = \max\{y^2, \sqrt{|y|}\}$ che siano definite su $\mathbb{R}$.

Esercizio 8 Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + |y'| = t + 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Determinare la soluzione in un intervallo aperto contenente l'origine e studiare se tale punto è di massimo, minimo o nessuno di questi.

Esercizio 9 Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \alpha|y| = te^t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

in un intervallo aperto contenente l'origine.

Suggerimento: Occorrerà distinguere i vari casi per α, con attenzione al caso in cui 1 è una radice caratteristica. Si osservi che le soluzioni del problema di Cauchy dipenderanno solo da α.

Esercizio 10 Consideriamo l'equazione differenziale

$$ty' = -y + \sinh t\,.$$

1. Provare che ogni soluzione si estende sia in $(0, +\infty)$ che in $(-\infty, 0)$.
2. Determinare l'integrale generale dell'equazione su $(-\infty, 0)$.
3. Stabilire se esiste una funzione continua su $\mathbb{R}$ che sia soluzione dell'equazione su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Esercizio 11 Stabilire se la soluzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y| + 2|t| \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

si annulla in qualche punto di $\mathbb{R}$ e se il caso si presenta scrivere il numero di zeri della soluzione.

Esercizio 12 Determinare l'integrale generale dell'equazione $y''' + y = t^3$ e risolvere

$$\begin{cases} y''' + |y| = t^3 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

in un intervallo aperto contenente l'origine.

Esercizio 13 Determinare l'integrale generale dell'equazione $y''+y'+2y = t(e^t-1)$, stabilendo se esistono soluzioni limitate. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + |y'| + 2y = t(e^t - 1) \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

in un aperto contenente l'origine.

Esercizio 14 Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{1 - \sin y} \\ y(\tau) = \eta \end{cases} . \tag{3}$$

1. Determinare tutte le soluzioni costanti e stabilire se esistono soluzioni che non siano estendibili su $\mathbb{R}$.

2. Trovare tutti i dati iniziali $(\tau, \eta) \in \mathbb{R}^2$ tali per cui non c'è unicità locale. Individuare graficamente tutte le soluzioni con tali dati iniziali e definite in un aperto contenente τ.

3. Determinare tutti i dati iniziali $(\tau, \eta) \in \mathbb{R}^2$ per cui non c'è unicità globale.

4. Determinare quali trasformazioni portano soluzioni della sola equazione differenziale $y' = \sqrt[3]{1 - \sin y}$ in nuove soluzioni.

   Suggerimento: Si osservi che il campo delle velocità è periodico e indipendente dal tempo (ovvero autonomo).

5. Tracciare dei grafici qualitativi di tutte le soluzioni, anche avvalendosi delle proprietà di simmetria sopra enunciate.

6. Determinare una formula per ottenere il tempo minimo che impiega una soluzione per passare da $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ a $\frac{\pi}{2} + 2(k+1)\pi$.

Soluzione. Svolgiamo l'esercizio per punti.

1. Il campo delle velocità dell'equazione differenziale

   $$f(t, y) = \sqrt[3]{1 - \sin y}$$

   è limitato e localmente lipschitziano nell'aperto

   $$\Omega = \{(\tau, \eta) : \eta \neq \eta_k \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z}\},$$

   dove $\eta_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Quindi per i dati iniziali in Ω, dal teorema di esistenza globale esiste la soluzione fino a quando il suo grafico sta in Ω. D'altra parte le soluzioni sono strettamente crescenti ed hanno limite quando il loro grafico raggiunge $\partial\Omega$. In tali punti si trovano esattamente le soluzioni costanti

   $$y(t) \equiv \eta_k$$

   quindi la soluzione con dati iniziali in Ω si estende ad una soluzione su $\mathbb{R}$. Se i dati sono in $\partial\Omega$ allora si ha almeno una soluzione costante, e quindi automaticamente definita su $\mathbb{R}$. Concludiamo che non esistono soluzioni non estendibili globalmente.

2. Osserviamo che per il dato iniziale $(\tau, \eta) \in \Omega$ la derivata parziale $\partial_y f$ esiste ed è continua in un intorno aperto di (τ, η), quindi c'è unicità locale della soluzione solo per un dato intervallo aperto contenente τ. Se consideriamo $\eta = \eta_k$, per qualche $k \in \mathbb{Z}$ fissato, oltre alla soluzione costantemente uguale ad η_k abbiamo un'altra soluzione ottenibile integrando per separazione di variabili

   $$\int_{\eta_k}^{y(t)} \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \sin x}} dx = t - \tau.$$

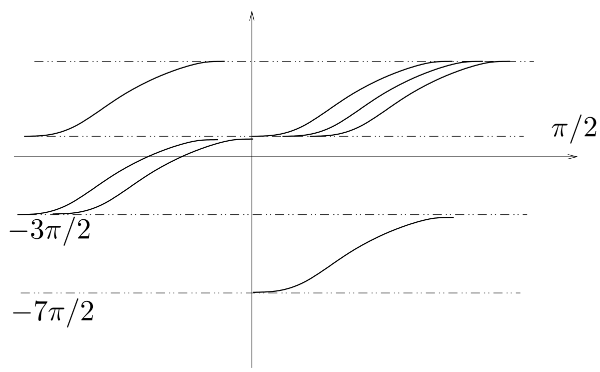
Osserviamo che tale integrale è convergente, infatti abbiamo

$$F(y) = \int_{\eta_k}^{y} \frac{1}{\sqrt[3]{1-\sin x}} dx$$

strettamente crescente e inoltre se x è vicino a η_k abbiamo

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(\eta_k) + \cos(\eta_k)(x-\eta_k) - \frac{\sin(\eta_k)}{2}(x-\eta_k)^2 + o(|x-\eta_k|^2) \\ &= 1 - \frac{(x-\eta_k)^2}{2} + o(|x-\eta_k|^2) \end{aligned}$$

quindi l'integrale è convergente e pertanto F è strettamente crescente e definita su $\mathbb{R}$ e suriettiva su $\mathbb{R}$. Quindi $y(t) = F^{-1}(t-\tau)$ è una soluzione definita su $\mathbb{R}$. Alternando soluzioni prima costanti e poi ottenute integrando per separazioni di variabili troviamo tutte le soluzioni con dato iniziale (τ, η_k), come schematizzato in figura.



Concludiamo che i dati iniziali per cui c'è unicità locale sono tutti e soli quelli di Ω.

3. Non esiste alcun dato (τ, η) per cui si abbia unicità globale in quanto ogni soluzione assumerà ad un certo istante un valore η_k, ove si ha sempre una biforcazione in almeno due diverse soluzioni.

4. L'equazione differenziale è "autonoma", ovvero il campo non dipende dal tempo, per cui se y è soluzione allora anche

$$t \to y(t+c) \quad \text{e} \quad t \to y(t) + 2\pi \quad \text{sono soluzioni.}$$

5. Le precedenti osservazioni permettono di tracciare i grafici qualitativi delle soluzioni, come mostrato in figura.

6. Concludiamo infine che il tempo minimo T_0 che una soluzione y impiega per passare da η_k ad η_{k+1} è dato dalla formula

$$T_0 = \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \frac{1}{\sqrt[3]{1-\sin x}} dx = \int_{-3\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt[3]{1-\sin x}} dx,$$

ove l'ultima uguaglianza segue dalla 2π-periodicità di $\sin t$.

$\square$