Complementi di Analisi Matematica. Foglio di esercizi n.7
24/3/2018
(Aggiornamento del 18 Aprile 2018)

`Esercizi su massimi e minimi vincolati`

1. Determinare il paralelepipedo, con facce parallele ai piani coordinati e centro nell'origine, di volume massimo con vertici inscritti nell'ellissoide
$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$
al variare di $a, b, c > 0$.

2. Determinare il massimo ed il minimo di $\varphi(\theta) = \cos\theta + 2\sin^3\theta$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$. *Suggerimento.* Si consideri la funzione $f(x, y) = x + 2y^3$ sulla circonferenza.

3. Stabilire l'esistenza di punti di massimo e minimo della funzione
$$f(x, y) = \frac{y}{x^2}$$
sull'insieme $D = \{(x, y) : x \neq 0,\ x^2 + (y - 2)^2 \leq 1\}$ e nel caso determinarli.

4. Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme dato dal seguente sistema di equazioni
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z + 1)^4 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} .$$
Determinare i punti di massimo e di minimo, insieme al massimo ed al minimo di $f(x, y, z) = x + 2y$ sull'insieme C.

5. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^1(\Omega)$, $w \in S \cap \Omega$ un punto k-regolare di $S \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq k < n$ e sia $g = (g_1, \ldots, g_{n-k}) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{n-k})$ avente ovunque rango massimo con $S \cap g^{-1}(0) = S \cap \Omega$. Provare che w è un punto critico di f su S se e solo se non è massimo il rango di
$$\begin{pmatrix} \nabla f(w) \\ \nabla g_1(w) \\ \vdots \\ \nabla g_{n-k}(w) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

6. Definiamo $f(x, y) = xye^{x^2+2y^2}$ sull'insieme
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\right\}.$$
Determinare l'immagine $f(D)$.

7. Determinare i punti di massimo e di minimo di $f : D \to \mathbb{R}$, ove $f(x,y,z) = xy + yz$ e

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}.$$

Si determinino infine $\max_D f$ e $\min_D f$.

8. Determinare il massimo ed il minimo di $f(x,y,z) = xz + y$ sulla porzione di cono

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - z^2 - y^2 = 0, |x| \leq 1\right\}.$$

9. Si consideri $f : D \to \mathbb{R}$, ove $f(x,y) = (y^2 - x)e^x$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 \leq 0\}$.

   (a) Provare che esiste e calcolare $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$.

   (b) Determinare $f(D)$.

10. Si consideri l'insieme $C \subset \mathbb{R}^3$ dei punti (x,y,z) che risolvono il sistema seguente

$$\begin{cases} (x-y)^2 + z^2 = 3 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 = 1 \end{cases}.$$

   (a) Provare che $C \neq \emptyset$ e stabilire se C è una varietà.

   (b) Determinare $f(C)$, dove $f(x,y,z) = z$.

   Sugg. Non è necessario lo studio della connessione di C, ma si possono considerare i valori di z compresi tra il massimo ed il minimo tali che esistano soluzioni del sistema. Osserviamo infine che tale metodo consentirebbe di rispondere alla seconda domanda senza l'utilizzo dei moltiplicatori di Lagrange, data la particolare semplicità della f.

11. Si consideri l'insieme $C \subset \mathbb{R}^3$ dei punti (x,y,z) che risolvono il sistema seguente

$$\begin{cases} x^2 + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}.$$

   (a) Provare che $C \neq \emptyset$ e stabilire se C è una varietà. Disegnare C approssimativamente.

   (b) Determinare $f(C)$, dove $f(x,y,z) = y + z$.

   (c) Determinare $g(C)$, dove $g(x,y,z) = yz$.

12. Consideriamo l'insieme $C \subset \mathbb{R}^3$ dei punti che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}.$$

   (a) Provare che C è una curva regolare compatta.

   (b) Determinare i punti critici di $f(x,y,z) = xy$ su C ed i corrispettivi moltiplicatori di Lagrange.

(c) Determinare il massimo ed il minimo di $f(x, y, z) = xy$ su C.

13. Consideriamo $f(x, y, z, t) = xt + y^2$ e la 3-superficie

$$\Sigma = \Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^4 + t^2 = 9\Big\} .$$

Provare che Σ è una 3-superficie in $\mathbb{R}^4$ e determinare massimo e minimo di f su Σ.

14. Consideriamo $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ ed

$$E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^{10} + y^{10} + z^{10} \leq 1\Big\} .$$

Determinare $\max_E f$ e $\min_E f$.

15. Determinare massimo e minimo di

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin[\sqrt{(x-1)^2 + y^2}]}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} & \text{se } (x-1)^2 + y^2 > 0 \\ 1 & \text{se } x = 1 \text{ e } y = 0 \end{cases}$$

sul vincolo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Suggerimento: Considerare la funzione $\varphi(t) = \frac{1}{t} \sin t$ per $t \neq 0$ e $\varphi(0) = 1$ e osservare che è decrescente in $[0, 2]$. Osservare infine che la funzione "distanza dal punto $(1, 0)$" $(x, y) \to \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ ha immagine $[0, 2]$ in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

16. Sia $f(x, y, z) = e^{xy} + e^{-z^2}$ e si consideri la superficie cilindrica

$$\Sigma = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 = 3\Big\} .$$

Determinare $\inf_\Sigma f$ e $\sup_\Sigma f$, stabilendo se esistono massimo e minimo di f su Σ. In tal caso determinarli.

Suggerimento. Provare che se f e g sono due funzioni reali definite rispettivamente su A e B, allora

$$\sup_{(x,y)\in A\times B} \big(f(x) + g(y)\big) = \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{y\in B} f(y)$$

e analoga uguaglianza vale per l'estremo inferiore.