

Analisi II. Foglio di esercizi n.5

1/12/2017

(Aggiornamento del 9/3/2018)

Esercizi sull'integrazione rispetto la misura di superficie

1. Consideriamo l'astroide $\gamma(\varphi) = r(\cos^3 \varphi, \sin^3 \varphi)$ con $r > 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$.

(a) Tracciare il grafico della curva nel piano.

(b) Calcolare l'area dell'insieme limitato A delimitato da tale curva.

Sugg. Utilizzare la 1-forma differenziale d'area $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$, oppure osservare che la curva soddisfa l'equazione $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = r^{2/3}$ e utilizzare le simmetrie.

2. Calcolare l'area dell'insieme

$$E = \{(t \cos \varphi, t \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \varphi < \pi, 0 < t < 1 + \sin(2\varphi)\}.$$

Sugg. Utilizzare la 1-forma differenziale d'area $\frac{1}{2}\rho^2 d\varphi$.

3. Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 0 \text{ e } 0 \leq z \leq 2\}$. Tracciare un grafico qualitativo di Σ e calcolarne l'area.

4. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 + 2x^2 + 2y^2 < z < 2 - 2x^2 - 2y^2\}$. Si tracci il grafico di tale insieme e si calcoli l'area di $\partial\Omega$.

5. Scrivere il valore dell'area del grafico di $u : B \rightarrow \mathbb{R}$, dove abbiamo definito $u(x, y) = x + y^2 - x^2 - y$ e

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4} \right\}.$$

6. Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di rotazione ottenuta ruotando $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (0, t^2, t^4 + 1)$ attorno all'asse z . Calcolare l'area di Σ .

7. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - |z| - \frac{3}{4} < 0, |z| < \frac{1}{2}\}$. Sia

$$\Sigma = \partial\Omega \setminus \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| = \frac{1}{2} \right\}$$

e ν la normale esterna di Ω . Dato $F(x, y, z) = (y - z, x + z, z)$, calcolare il flusso $\Phi(F, \Sigma, \nu)$.

8. Data $\Sigma = \{(x, y, z) : 0 = e^{\sin x} - y + \log(2 + \cos(zx)), x^4 + z^4 < 1\}$. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva chiusa e semplice di classe C^1 la cui immagine è ∂H con $H = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + z^4 < 1\}$ e che orienta positivamente tale aperto. Calcolare $\int_{\Phi \circ \gamma} x dx + y dy + z dz$, dove

$$\Phi(x, z) = (x, e^{\sin x} + \log(2 + \cos(xz)), z).$$

9. Consideriamo il campo vettoriale $F(x, y) = (e^x - y^2 x, e^{-\sin y} + y x^2)$ e l'aperto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 < 1, 0 < x < \sqrt{3}, y > 0\}.$$

Sia Γ la curva C^1 a tratti iniettiva, che percorre tutto l'insieme $\partial\Omega$ in senso orario. Scrivere il valore di $\int_{\Gamma} F$, argomentando la risposta.

10. Consideriamo il campo vettoriale $F(x, y) = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$ e l'aperto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1, y - x < 1, y > 0\}.$$

Sia Γ la curva C^1 a tratti e semplice, la cui immagine è $\partial\Omega$ e che percorre tale insieme in senso antiorario. Calcolare $\int_{\Gamma} F$.

11. Calcolare l'area dell'insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ delimitato dalle curve $\gamma(t) = (t^2 e^t, t^2)$ su $[0, 1]$ e $c(t) = (te, t)$ su $[0, 1]$.

12. Consideriamo il seguente insieme aperto

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 - 4 < 0 \text{ e } x^2 + z^2 - 1 < y < 5\}$$

e sia ν la sua normale esterna nei punti di frontiera regolare. Introduciamo il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2z}{y+2}, 1 + x^3 \sin(y\pi), \frac{xz}{y+4} \right),$$

il quale è ben definito su $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y < 5\} \cap \partial\Omega$. Calcolare $\int_{\Sigma} \langle \text{rot } F, \nu \rangle d\sigma$.

13. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1\}$ e definiamo il campo vettoriale $F(x, y, z) = (xz, xy, 1)$. Considerando la superficie elementare

$$\Sigma = \{(x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$$

e la normale esterna ν ad Ω , calcolare il flusso $\int_{\Sigma} \langle F, \nu \rangle d\sigma$.

14. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < y < 4, y > 1\}$ e si consideri il campo vettoriale $F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{y}}(x, 0, z)$, il quale è ben definito su

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < y < 4\} \cap \partial\Omega.$$

Calcolare il flusso $\int_{\Sigma} \langle F, \nu \rangle d\sigma$, dove ν è la normale esterna ad Ω e σ denota la misura di superficie 2-dimensionale.

15. Consideriamo la superficie elementare con bordo

$$\Sigma = \{(x, y, z) : x + 2y + 3z = 1, x, y, z \geq 0\}.$$

- (a) Sia γ la curva C^1 a tratti, semplice e chiusa, la cui immagine è il bordo $\partial\Sigma$ e che passa nell'ordine per $(1, 0, 0)$, $(0, 1/2, 0)$ e $(0, 0, 1/3)$. Calcolare la circuitazione $\int_{\gamma} ydx - xdy + ydz$, sia per calcolo diretto che attraverso un opportuno utilizzo del teorema di Stokes.
- (b) Data ν normale a Σ tale che abbia seconda componente positiva e dato $F(x, y, z) = (x - y, y + z, x + y)$, calcolare il flusso $\Phi(F, \Sigma, \nu)$.

16. Consideriamo l'insieme

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 - (x - 1)^2 = 0, |x| \leq 1\}$$

ed il campo vettoriale $F = (xyz + yz, xz + x^4, 2x^2zy)$.

- (a) Si tracci un grafico qualitativo di tale insieme.
- (b) Calcolare $\int_{\Sigma} \langle \text{rot } F, \nu \rangle d\sigma$, dove ν è la normale a Σ nei punti 2-regolari e la cui prima componente è positiva.

17. Si consideri l'insieme $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, y + z \leq 2, z \geq 0\}$.

- (a) Tracciare un grafico qualitativo di C , determinando il suo bordo e provando che è costituito da curve regolari.
- (b) Determinare una parametrizzazione γ della parte superiore del bordo tale che la sua composizione con la proiezione sul piano xy determini una curva orientata in senso antiorario.
- (c) Calcolare la circuitazione $\int_{\gamma} x^2(1 - z)dx + y^2(1 - z)dy + (x^2 + y^2)dz$, sia direttamente che utilizzando opportunamente il teorema di Stokes.
Suggerimento: Occorre trovare la giusta scelta della normale ν a C .

18. Consideriamo gli aperti

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|, |y|\} < 2 \text{ e } 0 < z < 1\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4 \text{ e } z > 0\}$$

e si definisca $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Dati $F(x, y, z) = (x, x, zxy)$ e

$$\Sigma = \overline{(\partial\Omega)} \setminus \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$$

superficie regolare a tratti, con normale esterna ν ad Ω nei punti $\partial_{reg}\Omega$, si calcoli

$$\int_{\Sigma} \langle \text{rot } F, \nu \rangle d\sigma.$$

19. Dati $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 1 < z < 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ ed il campo

$$F(x, y, z) = (z^5 + e^y + xy, \log(2 + z) + y, x^7 y^3 + zx^3),$$

calcolare $\Phi(F, \partial\Omega, \nu)$, dove ν è la normale esterna su $\partial_{reg}\Omega$.

20. Consideriamo l'insieme

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0, x \leq 2^{-1}, y \leq 2^{-1}\}.$$

(a) Tracciare un grafico qualitativo di Σ .

(b) Orientando Σ con la normale $\nu(x, y, z) = (x, y, z)$, calcolare

$$\int_{\partial^+ \Sigma} y dx + (x - z^2) dy + xz dz.$$

21. Consideriamo l'insieme aperto

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} < 1, x^2 + (y - 2)^2 + z^2 > 1 \right\},$$

ed il campo $F(x, y, z) = (x + y, y - 2, z - xy)$.

(a) Tracciare un grafico qualitativo di Ω .

Suggerimento: Provare che $\partial B((0, 2, 0), 1)$ è contenuto nell'aperto

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} < 1\}.$$

(b) Determinare $\partial\Omega$, $\partial_{reg}\Omega$ e la normale esterna ν ad Ω .

(c) Calcolare sia $\Phi(F, \partial\Omega, \nu)$ che $\Phi(F, \Sigma, \nu)$, dove $\Sigma = \partial H$.

22. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - |z| - \frac{3}{4} < 0, |z| < \frac{1}{2}\}$.

- (a) Provare che Ω è limitato e stabilire se $\partial\Omega$ è una superficie regolare a tratti.
- (b) Tracciarne un grafico qualitativo evidenziando un asse di simmetria.
- (c) Sia $\Sigma = \partial\Omega \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| = \frac{1}{2}\}$ e ν la normale esterna di Ω . Calcolare $\Phi(\text{rot } G, \Sigma, \nu)$, dove $G(x, y, z) = (x^2 - y, zy^2, z)$.

23. Definiamo l'insieme

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + (y - x)^2 + x^2 = 1, (y - x)^2 + x^2 \leq 1\}.$$

- (a) Stabilire se tutti i punti del bordo $\partial\Sigma$ sono regolari.
Suggerimento: Osservare che $(y - x)^2 + x^2 = 1$ è una curva di classe C^1 e chiusa (trattasi precisamente di un'ellisse).
- (b) Calcolare $\Phi(F, \Sigma, \nu)$, dove $F(x, y, z) = (e^z - y^8, z^8 - e^x, 1 + x)$ e ν è la normale a Σ con terza componente ovunque positiva.
- (c) Calcolare $\int_{\gamma} (xz^2 + x)dx + (yx^2 + z)dy + (xy^2 + x)dz$, dove γ è la curva che percorre interamente una ed una sola volta il bordo $\partial\Sigma$ in senso antiorario.