

**Analisi II. Foglio di esercizi n.3**  
**8/11/2017**

Esercizi su integrali curvilinei e potenziali

1. Provare che  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (t, |t|)$ , è  $C^1$  a tratti su  $\mathbb{R}$ . Per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  calcolarne la lunghezza della restrizione  $\gamma|_{[a,b]}$ .
2. Si consideri la curva  $\gamma(t) = (2 \cos t, \sin t)$  su  $[0, 2\pi]$  e si calcoli

$$\int_{\gamma} (1 + 3y^2)^{-1/2} ds.$$

3. Consideriamo  $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ove  $\Gamma(t) = (e^t, t^2)$  per ogni  $t \in [0, 1]$ . Scrivere il valore di  $\int_{\Gamma} \sqrt{4y + x^2} ds$ .

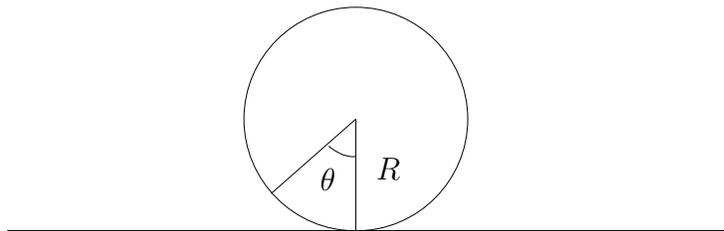
4. Dati  $L > 0$  e  $\gamma(t) = (t, 1 - t)$  su  $[0, L]$ , calcolare

$$\int_{\gamma} (e^{|y|} - x) ds.$$

5. Si consideri la “cicloide”, ovvero la curva ottenuta da un punto fissato ad una ruota che rotola su una retta senza slittamenti. Verificare che il punto ha coordinate

$$\gamma(\theta) = (R\theta - R \sin \theta, R - R \cos \theta).$$

Calcolare la lunghezza del tratto percorso dal punto sulla ruota, quando ha compiuto un intero giro.



6. Data  $\gamma : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (t^2, t^2|1+t|, \frac{t^3}{3})$ . Provare che  $\gamma$  è  $C^1$  a tratti.
7. Calcolare la lunghezza di  $\gamma : [\frac{1}{\sqrt{15}} - \frac{1}{4}, \frac{2}{\sqrt{15}} - \frac{1}{4}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definita come

$$\gamma(t) = \left( \frac{t^2}{2}, \frac{2}{\sqrt{15}}t^2 + \sqrt{\frac{5}{3}}t^3, \frac{t^3}{3} \right).$$

*Sugg.* Usare la formula  $\int_0^t \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} (\log(t + \sqrt{1+t^2}) + t\sqrt{1+t^2})$ .

8. Calcolare la lunghezza di  $\gamma : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (t^2, t^3, t^3)$ .

9. Data la 1-forma differenziale  $\eta_0 = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$  e consideriamo

$$\gamma(t) = (t^2 + \log(e^t + t^8)) (\cos t, \sin t)$$

definita su  $(0, 2\pi)$ . Calcolare, se esiste,

$$\int_{\gamma} \eta_0 := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma|_{[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]}} \eta_0$$

*Sugg.* Considerare la funzione arcocoseno.

10. Si consideri la 1-forma differenziale

$$\omega = xdx + e^z dy + ye^z dz$$

e la curva  $\gamma(t) = (e^{e^{\cos t - \sin^2 t}}, \log(1 + e^{-t^2 + \cos t}), \frac{1}{1+t^4})$  sull'intervallo  $[0, \pi]$ .  
Calcolare  $\int_{\gamma} \omega$ .

11. Data  $\gamma(t) = (t, 1 - t, t^2)$  su  $[0, \sqrt{2}]$ , calcolare  $\int_{\gamma} (|x + y| + \sqrt{|z|}) ds$ .

*Sugg.* Usare la formula  $\int_0^t \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} (\log(t + \sqrt{1 + t^2}) + t\sqrt{1 + t^2})$ .

12. Si consideri la curva  $\gamma(t) = (\log(1 + e^t), 1, \cos(\pi t))$  su  $[0, 1]$  e si calcoli  $\int_{\gamma} F$ , ove  $F = \left(\frac{z}{y}, -\frac{xz}{y^2}, \frac{x}{y}\right)$ .

13. Si consideri la seguente curva  $\gamma(t) = (-t^3, 2e^{\sin(\pi t)}, \sin(\pi t))$  su  $[0, 1]$ . Si calcoli l'integrale  $\int_{\Gamma} F$ , ove  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è definita come

$$F = \left( \frac{x^3}{1 + x^4 + y^4 + z^4}, \frac{y^3}{1 + x^4 + y^4 + z^4}, \frac{z^3}{1 + x^4 + y^4 + z^4} \right).$$

14. Stabilire se esistono e nel caso determinare gli  $\alpha$  reali tali che il campo  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ove

$$F(x, y) = \left( \frac{\alpha y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

sia conservativo in  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ . Per tali  $\alpha$ , nel caso esistano, calcolare un potenziale di  $F$  su  $\Omega$ .

15. Stabilire se il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

è conservativo sull'aperto  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ , dandone una breve argomentazione. Data la curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\gamma(t) = ((1-t)\cos(\pi - t\pi), 1 + (1-t)\sin(\pi - t\pi)),$$

scrivere il valore dell'integrale  $\int_{\gamma} F$ .

16. Scrivere l'unica funzione potenziale  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  del campo

$$F(x, y) = \left( \frac{\cos(x+y)}{2 + \sin(x+y)}, \frac{\cos(x+y)}{2 + \sin(x+y)} \right)$$

tale che  $V(0, 0) = \log 4$ .

17. Sia data la 1-forma differenziale  $\omega = \frac{dx}{(1+y)(1+x)^2} + \frac{dy}{(1+x)(1+y)^2}$ .  
Definendo la curva  $\gamma : [0, \sqrt{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (e^{\sin(t^2)}, e^{\cos(t^2)})$ , si scriva il valore di  $\int_{\gamma} \omega$ .

18. Consideriamo  $F(x, y) = (x+y, x-y)$  e  $\gamma(t) = (t, e^t)$  su  $[0, 1]$ .

(a) Stabilire se  $F$  è conservativo in  $\mathbb{R}^2$ .

(b) Calcolare  $\int_{\gamma} F$ .

19. Consideriamo la forma differenziale

$$\omega = (2xyz + y^2z - y + 2z)dx + (x^2z + 2xyz - x - 4)dy + (x^2y + xy^2 + 2x + 1)dz$$

e la curva  $\gamma(t) = (\sin t, t, e^t)$  su  $[0, \pi]$ .

(a) Stabilire se  $\omega$  è esatta in  $\mathbb{R}^3$ .

(b) Calcolare  $\int_{\gamma} \omega$ .

20. Sia data la 1-forma differenziale  $\omega_{\alpha} = xydx + dy + \frac{\alpha x^2}{2}dy$ .

(a) Stabilire per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  la 1-forma differenziale  $\omega_{\alpha}$  è esatta in  $\mathbb{R}^2$ .

(b) Per tali  $\alpha \in \mathbb{R}$  determinarne una primitiva  $f_{\alpha}$ .

21. Al variare di  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , sia data la 1-forma differenziale

$$\omega_{\alpha, \beta} = y(x-z)dx + (\alpha x^2 + \beta z^2 - xz)dy + y(z-x)dz.$$

- (a) Determinare per quali  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  la 1-forma differenziale  $\omega_{\alpha, \beta}$  è esatta in  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Per tali  $\alpha, \beta$  determinarne una primitiva di  $\omega_{\alpha, \beta}$  e calcolare  $\int_{\gamma} \omega_{\alpha, \beta}$ , dove abbiamo definito  $\gamma(t) = (t, \operatorname{tg} t, \sin t)$  su  $[0, \pi/4]$

22. Consideriamo  $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$F(x, y, z) = \left( \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, -\frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right).$$

Stabilire se  $F$  è conservativo in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  ed in tal caso determinarne un potenziale.

23. Determinare il più grande dominio della 1-forma differenziale

$$\omega = -\frac{x}{x^2 - y^2 - z^2} dx + \frac{y}{x^2 - y^2 - z^2} dy + \frac{z}{x^2 - y^2 - z^2} dz$$

e stabilire se ha una primitiva in tale dominio.

24. Determinare tutti i valori  $p \in \mathbb{R}$  tali che il campo vettoriale

$$F = \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^p}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^p}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^p}, \frac{t}{(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^p} \right)$$

sia conservativo in  $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$  e per essi determinarne un potenziale.

25. (**Avanzato**) Consideriamo l'aperto  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\}$  ed il campo  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  definito come segue

$$F(x, y) = \left( \frac{\sigma_y |y|^q}{(x^2 + y^2)^p}, \frac{\sigma_x |x|^q}{(x^2 + y^2)^p} \right),$$

dove  $p, q \in \mathbb{R}$ . La funzione segno soddisfa  $\sigma_t = 1$  se  $t > 0$ ,  $\sigma_0 = 0$  e  $\sigma_t = -1$  se  $t < 0$ . Determinare per quali coppie  $(p, q)$  il campo  $F$  è conservativo, ed in tal caso calcolarne la funzione potenziale.