

## Analisi II. Foglio di esercizi n.2

10/10/2017

(Aggiornamento del 17/10/2017)

Esercizi su massimi e minimi liberi con studi aggiuntivi

1. Siano  $K \subset \mathbb{R}^n$  compatto e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto contenente  $K$ . Si consideri  $f \in C^1(\Omega)$  tale che  $f(x) = 0$  per ogni  $x \in K$ . Stabilire se anche il differenziale di  $f$  si deve annullare in tutti i punti di  $K$ . Nel caso questa proprietà non valga si esibisca una funzione che non la possieda.

2. Sia  $f : (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$f(x, y, z) = \frac{y + z^2 + x}{x^2 + y^2}.$$

Stabilire se  $f$  ha un massimo o un minimo globale sul suo dominio ed in tal caso determinarlo.

3. Data  $f(x, y, z) = \frac{1}{2}[(x - y - z)^2 + (x + y + z)^2]$ .

(a) Determinare i punti critici di  $f$ .

(b) Determinare i punti di massimo e minimo di  $f$ .

(c) Stabilire se esiste  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow \infty} f(x, y, z)$ , ed in tal caso calcolarlo.

4. Calcolare la matrice hessiana di  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

5. Scrivere l'immagine della funzione  $f : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita come

$$f(x, y) = x^2y - x^3 + 1.$$

6. Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita come  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$ . Si determini l'immagine  $f(\mathbb{R}^2)$ .

7. Si consideri  $f(x, y, z) = \sin(e^{x^2+y^2+z^2})$  definita sull'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \log \pi + \log \frac{1}{2} \right\}.$$

(a) Determinare tutti i punti critici di  $f$ .

(b) Determinare il massimo ed il minimo di  $f$

(c) Determinare tutti i punti di massimo ed i punti di minimo di  $f$ .

8. Scrivere il massimo ed il minimo di

$$f(x, y, z) = z^2 + \sin\left(\frac{x + y^2}{2}\right)$$

su  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$ , evidenziando i principali passaggi che hanno portato alla determinazione di tali valori.

*Sugg.* Controllare l'esistenza dei punti critici prima nella parte interna  $\overset{\circ}{D}$ . Dedurre quindi l'esistenza del massimo e del minimo nei punti di  $\partial D$ . Osservare che  $\sin$  è monotona crescente in  $[-1, 1]$ . Si osservi che non occorre utilizzare la matrice hessiana per la risoluzione di questo esercizio.

9. Consideriamo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita come

$$f(x, y, z) = y \sin x + z^2.$$

- (a) Determinare l'immagine di  $f$ .
- (b) Determinare massimi e minimi locali e globali, nel caso esistano.
- (c) Determinare i punti di massimo e di minimo locale e globale, nel caso esistano.

10. Scrivere l'immagine di  $f(x, y) = -\sin^2(x - y)$ , definita su  $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ .

11. Data  $f(x, y) = \frac{e^{-x^4}}{1 + |x| + |y|}$ , si determini  $f(\mathbb{R}^2)$ .

12. Determinare l'immagine di  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , ove  $f(x, y) = xye^{-4x^2 - y^2}$ .

13. Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $f(x, y) = x^3 - xy^2 + 2x^2 + y^2$ .

- (a) Determinare  $\sup_{\mathbb{R}^2} f$  e  $\inf_{\mathbb{R}^2} f$ .
- (b) Determinare massimi e minimi locali e globali, nel caso esistano.
- (c) Determinare i punti di massimo e di minimo locale e globale, nel caso esistano.

14. Definiamo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = x^3 - xy^2 + 2x^2 + zy^2$ .

- (a) Stabilire se esiste il limite di  $f$  per  $(x, y, z) \rightarrow \infty$ .
- (b) Determinare  $\sup_{\mathbb{R}^3} f$  e  $\inf_{\mathbb{R}^3} f$ .
- (c) Determinare tutti i punti critici.
- (d) Stabilire se la matrice hessiana in tali punti è definita positiva, definita negativa, invertibile o diversamente.

15. (**Avanzato**) Sia  $f(x, y) = |2 - xy| + x(y + \log x)^2$ .

- (a) Determinare il più grande dominio di  $f$ .
- (b) Determinare i punti di massimo o minimo locale o di sella, se esistono.
- (c) Determinare l'immagine di  $f$ .

**Svolgimento.** Il più grande dominio di  $f$  è l'insieme  $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ . Cerchiamo i punti critici di  $f$ , ove è differenziabile. Escludiamo quindi l'insieme  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 2\}$ .

Quindi per  $(x, y) \in \Omega \setminus E$ , ponendo

$$\sigma = \begin{cases} 1 & \text{se } 2 - xy > 0 \\ -1 & \text{se } 2 - xy < 0 \end{cases}$$

abbiamo il sistema

$$\begin{cases} f_x = -y\sigma + (y + \log x)^2 + 2(y + \log x) = 0 \\ f_y = -x\sigma + 2x(y + \log x) = 0 \end{cases}.$$

La seconda equazione, poiché  $x > 0$ , offre

$$y + \log x = \frac{\sigma}{2}.$$

Se  $y < 2/x$ , allora  $\sigma = 1$  e  $y + \log x = 1/2$  e la prima equazione implica

$$-y + \frac{1}{4} + 1 = 0.$$

Quindi  $y = 5/4$  e  $\log x = 1/2 - 5/4 = -3/4$ , ovvero abbiamo il punto

$$p = (e^{-3/4}, 5/4)$$

che per essere critico deve soddisfare la condizione

$$2 > \frac{5}{4}e^{-3/4}$$

ovvero  $8/5 > e^{-3/4}$ , che è vera. Se  $y > 2/x$ , allora  $\sigma = -1$  e  $y + \log x = -1/2$  e la prima equazione implica

$$y + \frac{1}{4} - 1 = 0.$$

Quindi  $y = 3/4$  e  $\log x = 1/2 - 3/4 = -1/4$ , ovvero abbiamo il punto

$$q = (e^{-1/4}, 3/4)$$

che per essere critico deve soddisfare la condizione

$$2 < \frac{3}{4}e^{-1/4}$$

ovvero  $8/3 < e^{-1/4}$ , che è falsa, pertanto  $q$  non è critico. Per valutare la natura di tali punti consideriamo l'hessiana

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2(y+\log x)}{x} + \frac{2}{x} & -\sigma + 2(y + \log x) + 2 \\ -\sigma + 2(y + \log x) + 2 & 2x \end{pmatrix}$$

che nei punti critici vale

$$Hf(p) = \begin{pmatrix} 3e^{3/4} & 2 \\ 2 & 2e^{-3/4} \end{pmatrix}.$$

Concludiamo che  $p$  è l'unico punto critico ed è di minimo locale.

Definiamo per  $c \in (0, 1)$  l'insieme

$$A_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq c\}.$$

Si può verificare che  $f \rightarrow +\infty$  per  $(x, y) \rightarrow \infty$  e  $(x, y) \in A_c$ . Infatti se consideriamo  $M > 1$  e  $f(x, y) \leq M$  con  $(x, y) \in A_c$ , allora

$$|y| \leq \frac{2+M}{c} \quad \text{e} \quad x \leq e^{\sqrt{M/c+(2+M)/c}}$$

pertanto se una di tali condizioni non è verificata, ovvero

$$|(x, y)| \geq \min \left\{ \frac{2+M}{c}, e^{\sqrt{M/c+(2+M)/c}} \right\}$$

deve essere  $f(x, y) > M$ . Tale condizione assieme alla continuità di  $f$  assicura che esiste

$$\min_{A_c} f.$$

Osserviamo inoltre che

$$\min_{A_c} f \rightarrow \inf_{\Omega} f = \lambda \geq 0 \quad \text{per } c \rightarrow 0^+.$$

Se per ogni  $c > 0$  sufficientemente piccolo il minimo è assunto internamente, allora deve coincidere con il punto critico  $p$ , quindi

$$f(p) = \min_{A_c} f \rightarrow \lambda \quad \text{per } c \rightarrow 0^+,$$

ovvero  $f(p) = \min_{\Omega} f$ . Se esiste una successione  $c_k \rightarrow 0^+$  tale che il minimo è assunto su  $\partial A_{c_k}$ , allora poniamo

$$p_k = (c_k, \theta_k + \log(1/c_k))$$

tale che  $f(p_k) = \min_{A_{c_k}} f$ . Abbiamo

$$f(p_k) = |2 + c_k \log c_k - c_k \theta_k| + c_k \theta_k^2 \rightarrow \lambda$$

Essendo tale successione limitata, segue anche la limitatezza di  $c_k \theta_k$ . Esiste pertanto una sottosuccessione  $c_{k_j} \theta_{k_j}$  convergente, ovvero

$$c_{k_j} \theta_{k_j} \rightarrow \mu_1 \quad \text{per } j \rightarrow \infty.$$

Se  $\mu_1 \neq 0$ , allora  $|\theta_{k_j}| \rightarrow +\infty$  in quanto  $c_{k_j} \rightarrow 0$ , quindi

$$c_{k_j} \theta_{k_j}^2 = |c_{k_j} \theta_{k_j}| |\theta_{k_j}| \geq \frac{|\mu_1|}{2} |\theta_{k_j}| \rightarrow +\infty$$

e ciò contraddice la convergenza di  $f(p_k)$ . Se  $\mu_1 = 0$ , allora

$$f(p_{k_j}) \geq |2 + c_{k_j} \log c_{k_j} - c_{k_j} \theta_{k_j}| \rightarrow 2$$

pertanto otterremmo che

$$\lambda = \lim_{j \rightarrow \infty} f(p_{k_j}) \geq 2,$$

ma ciò contrasta con il fatto che

$$\begin{aligned} \lambda \leq f(p) &= f(e^{-3/4}, 5/4) = \left| 2 - e^{-3/4} \frac{5}{4} \right| + e^{-3/4} \left( \frac{5}{4} - \frac{3}{4} \right)^2 \\ &= 2 - e^{-3/4} \frac{5}{4} + \frac{1}{4} e^{-3/4} \\ &= 2 - e^{-3/4} < 2. \end{aligned}$$

Ne segue che deve essere  $f(p) = \min_{A_c} f$  per  $0 < \delta < e^{-3/4}$  e un opportuno  $\delta > 0$ . Concludiamo quindi che

$$\min_{\Omega} f = 2 - e^{-3/4} \quad \text{e} \quad f(\Omega) = [2 - e^{-3/4}, +\infty).$$

16. (**Avanzato**) Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} x - y \arctan(x/y) & y \neq 0 \\ x & y = 0 \end{cases}.$$

Stabilire se  $f$  ha massimo e minimo su  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  e nel caso determinarli.

*Sugg.* Si provi che  $f$  è continua in  $\mathbb{R}^2$ . Nei punti di  $\partial D$  rappresentare la funzione nelle coordinate polari  $x = \sin t$  e  $y = \cos t$ . Osservare inoltre che  $f$  è pari rispetto la variabile  $y$ .

## APPENDICE

17. **(Polinomi di più variabili)**. Dato il multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , per  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  definiamo il monomio  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ . Ad esempio  $(x, y, z)^{(1,2,3)} = xy^2z^3$ . Definendo il *peso* del multi-indice  $\alpha$  come  $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ , possiamo scrivere il polinomio  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di grado  $k$  come

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha x^\alpha.$$

Ad esempio  $p_1(x, y, z) = x^2yz + y + z^6y - 1$ ,  $p_2(x, y) = x^2y - y^6x + y + 1$  sono polinomi rispettivamente di tre variabili e due variabili ed entrambi sono di grado 7. Provare che una qualunque funzione polinomiale  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  appartiene a  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

18. **(Studio della differenziabilità)**. Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{diversamente} \end{cases}.$$

- (a) Studiare la continuità di  $f$  in  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) Studiare l'esistenza di tutte le derivate direzionali di  $f$  in ogni punto di  $\mathbb{R}^2$ .
- (c) Studiare la differenziabilità di  $f$  in ogni punto di  $\mathbb{R}^2$ .
- (d) Determinare il più grande aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  tale che  $f \in C^1(\Omega)$ .

**Svolgimento.** La  $f$  è continua nell'origine in quanto

$$|f(x, y)| \leq \frac{|x||y|^3}{x^2 + y^4} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^4}\sqrt{x^2 + y^4}|y|}{x^2 + y^4} = |y| \rightarrow 0$$

per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Per studiare l'esistenza delle derivate direzionali nell'origine consideriamo  $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ed il limite del rapporto

$$\frac{f(t\alpha, t\beta)}{t} = t^2 \left( \frac{\alpha\beta^3}{\alpha^2 + t^2\beta^4} \right) \rightarrow 0$$

per  $t \rightarrow 0$  nel caso  $\alpha \neq 0$ . Nel caso  $\alpha = 0$ , allora

$$\frac{f(t\alpha, 0)}{t} = 0 \rightarrow 0.$$

Abbiamo provato l'esistenza di tutte le derivate direzionali ed il loro annullamento. In particolare si annullano tutte le derivate parziali di  $f$  nell'origine.

Fuori dall'origine  $f$  ha le derivate parziali

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y^3(x^2 + y^4) - 2x^2y^3}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{y^7 - x^2y^3}{(x^2 + y^4)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{3xy^2(x^2 + y^4) - 4xy^6}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{3x^3y^2 - xy^6}{(x^2 + y^4)^2}\end{aligned}$$

continue in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  ed è pertanto ivi differenziabile. Avendo tutte le derivate direzionali nulle nell'origine il rapporto incrementale per la differenziabilità è il seguente

$$\frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xy^3}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}},$$

il quale non tende a zero. È sufficiente prendere la successione  $z_k = (t_k^2, t_k)$  con  $t_k \rightarrow 0^+$  e la successione  $w_k = (t_k, 0)$ . Concludiamo quindi che  $f$  non è differenziabile nell'origine, ovvero è differenziabile in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . L'aperto cercato è  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  e  $f \in C^1(\Omega)$ .

19. **(Studio di limite all'infinito).** Siano  $\alpha, \beta > 0$  e sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita come

$$f(x, y) = |x|^\alpha + |y|^\beta.$$

Studiare l'esistenza del limite di  $f$  per  $(x, y) \rightarrow \infty$ .

**Svolgimento.** Utilizzando le coordinate polari

$$T(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi),$$

con  $\rho > 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ , ponendo  $\gamma = \min\{\alpha, \beta\} > 0$ , otteniamo

$$\begin{aligned}f(T(\rho, \varphi)) &= g(\rho, \varphi) = \rho^\gamma(\rho^{\alpha-\gamma}|\cos \varphi|^\alpha + \rho^{\beta-\gamma}|\sin \varphi|^\beta) \\ &\geq \rho^\gamma(|\cos \varphi|^\alpha + |\sin \varphi|^\beta)\end{aligned}$$

per  $\rho \geq 1$ . Il fatto che la funzione

$$[0, 2\pi] \rightarrow |\cos \varphi|^\alpha + |\sin \varphi|^\beta$$

sia continua sull'intervallo compatto  $[0, 2\pi]$  implica che ha minimo  $c_0 > 0$ , per il teorema di Weierstrass. Osserviamo inoltre che  $|(x, y)| \rightarrow +\infty$ , in coordinate polari significa che  $\rho \rightarrow +\infty$ . Concludiamo quindi che per  $\rho \geq 1$  si può passare al limite ottenendo

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = g(\rho, \theta) \geq \rho^\gamma c_0 \rightarrow +\infty \quad \text{per } \rho \rightarrow +\infty.$$

Dal teorema di confronto per i limiti abbiamo provato che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y) = +\infty$$

indipendentemente dalla scelta dei valori positivi  $\alpha$  e  $\beta$ .