Programma d'esame di

Analisi Matematica II e Complementi di Analisi Matematica

per i corsi di laurea triennale in Ingegneria Chimica ed Ingegneria dell'Energia

Anno Accademico 2016/2017

Analisi Matematica II

(1) `Topologia di` $\mathbb{R}^n$

(a) Distanza euclidea, prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Successioni e loro limiti in $\mathbb{R}^n$. Nozioni di insiemi aperto, insieme chiuso, chiusura di un insieme per successioni e loro proprietà. Punti di accumulazione, isolati, e di frontiera. Parte interna e frontiera di un insieme in $\mathbb{R}^n$. Insiemi connessi e connessi per archi. Insiemi compatti in $\mathbb{R}^n$ definiti per successioni e loro caratterizzazione come insiemi chiusi e limitati.

(b) Limiti di più variabili reali in punti di $\mathbb{R}^n$ e all'infinito, loro caratterizzazione per limiti di successioni, unicità, operazioni tra limiti, teorema del confronto e teoremi di permanenza del segno. Funzioni continue e operazioni elementari tra funzioni continue. Teorema di Weierstrass, massimi e minimi globali su insiemi illimitati e chiusi. L'immagine reale e continua di un insieme connesso per archi è un intervallo di $\mathbb{R}$.

(2) `Differenziabilità per funzioni di più variabili reali`

(a) Derivata parziale e derivata direzionale, funzioni lineari, base duale e spazio duale di $\mathbb{R}^n$ e nozione di differenziale di funzioni reali e vettoriali di più variabili reali. Gradiente di funzione reale, relazione del differenziale con il gradiente e le derivate direzionali (con dimostrazione). La continuità è conseguenza dalla differenziabilità (con dimostrazione). La continuità delle derivate parziali implica la differenziabilità. Punti critici e annullamento delle derivate direzionali nei punti di massimo o di minimo locale (con dimostrazione).

(b) Derivate parziali di ordine superiore, classi di funzioni $C^k(\Omega)$, differenziale secondo, teorema di Schwarz e formula di Taylor al secondo ordine con resto di Peano per funzioni in $C^2(\Omega)$. Matrici simmetriche e loro positività, matrice hessiana e criterio di Sylvester. Condizioni sufficienti per l'esistenza di massimi o di minimi locali (con dimostrazione), punti di sella. Differenziabilità e differenziale di funzioni vettoriali e matrice jacobiana.

(c) Differenziabilità della composizione di funzioni vettoriali differenziabili. Definizione di matrice jacobiana e formula per il calcolo della matrice jacobiana di una composizione di funzioni differenziabili. Sistemi di coordinate sferiche, cilindriche, polari e loro matrice jacobiana.

(3) `Integrali curvilinei, campi vettoriali, 1-forme differenziali e potenziali`

(a) Curve C^1 a tratti in $\mathbb{R}^n$ e formula di calcolo per la loro lunghezza. Integrale curvilineo di funzione scalare (o di prima specie) e sua invarianza per cambio di parametrizzazione della curva (con dimostrazione).

(b) Nozione di 1-forma differenziale chiusa, esatta e sua primitiva. Campo vettoriale irrotazionale, conservativo e suo potenziale. Campo vettoriale radiale. Integrali curvilinei per 1-forme differenziali o per campi vettoriali (di seconda specie). Sua invarianza per cambio di parametrizzazione, a meno del verso di percorrenza della curva (con dimostrazione). Corrispondenza tra campi vettoriali e 1-forme differenziali.

(c) Caratterizzazione di una 1-forma differenziale esatta con l'annullamento del suo integrale curvilineo lungo curve chiuse C^1 a tratti e tramite l'invarianza del suo integrale curvilineo su curve C^1 a tratti che abbiano gli stessi estremi iniziali e finali (con dimostrazione).
(d) Curve omotope ad un punto, insiemi semplicemente connessi ed esempi. Caratterizzazione di campi conservativi e di 1-forme differenziali esatte su aperti semplicemente connessi.

(4) `Integrazione secondo Lebesgue`

(a) Misura di Lebesgue, sue proprietà di monotonia, subadditività finita e numerabile. Insiemi misurabili secondo Lebesgue. Insiemi trascurabili e proprietà quasi ovunque. Operazioni insiemistiche finite e numerabili su insiemi misurabili. Additività numerabile della misura di Lebesgue. Esistenza di insiemi non misurabili.
(b) Funzioni misurabili secondo Lebesgue: le funzioni continue fuori da un insieme di misura nulla sono misurabili. Combinazioni lineari e prodotti di funzioni misurabili, ove ben definiti, sono misurabili. Funzioni semplici, integrale di Lebesgue e funzioni integrabili secondo Lebesgue.
(c) Le funzioni integrabili secondo Riemann sono integrabili secondo Lebesgue. Relazione tra integrabilità secondo Riemann in senso improprio e integrabilità secondo Lebesgue. Teorema di Tonelli e teorema di Fubini. Teoremi di cambiamento di variabile per funzioni sommabili e per funzioni misurabili non negative.

(5) `Misura di area ed elementi di Analisi Vettoriale`

(a) Jacobiano di una mappa da un aperto di $\mathbb{R}^2$ ad $\mathbb{R}^3$, formula per la misura di area in $\mathbb{R}^3$ di insiemi parametrizzati. Integrale di superficie di funzioni continue su insiemi parametrizzati. Cenni all'esistenza di una misura 2-dimensionale in $\mathbb{R}^3$ che estende le nozioni di area e di integrale superficiale.
(b) Grafici in $\mathbb{R}^3$, punti 2-regolari, superfici regolari, vettori normali e spazi tangenti. Punti di frontiera regolari, singolari e normale esterna per aperti di $\mathbb{R}^3$. Formula per il campo vettoriale normale ad un grafico.
(c) Aperti regolari e loro orientazione positiva del bordo, teorema di Gauss-Green, 1-forme differenziali d'area, prodotto vettoriale, sue proprietà algebriche e geometriche e rotore di un campo vettoriale.
(d) Domini piani elementari, superfici elementari, superfici regolari a tratti, flussi di campi vettoriali rispetto a superfici, o σ-misurabili e teorema della divergenza nello spazio. Superfici parametrizzate e relativo flusso di campi vettoriali, superfici parametrizzate elementari con bordo, loro orientazione del bordo e orientazione del bordo per superfici regolari a tratti coerentemente orientate. Teorema di Stokes sia per superfici parametrizzate elementari con bordo che per superfici regolari a tratti coerentemente orientate.

Complementi di Analisi Matematica

(1) `Varietà in` $\mathbb{R}^n$ `e moltiplicatori di Lagrange`

(a) Funzione definente, punto k-regolare e superficie di dimensione k in $\mathbb{R}^n$.
(b) Teorema della mappa implicita per funzioni vettoriali.
(c) Definizioni equivalenti di k-superfici in $\mathbb{R}^n$ e parametrizzazioni locali. Spazio tangente di una k-superficie di $\mathbb{R}^n$ in un punto, sia come nucleo di mappa lineare, che come immagine di mappa lineare, ovvero in forma parametrica.

(d) Punti critici di funzioni reali su k-superfici di $\mathbb{R}^n$ e loro caratterizzazione con i moltiplicatori di Lagrange. I punti di massimo e di minimo locali di funzioni in punti regolari del loro dominio sono critici (con dimostrazione).

(2) `Equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie`

(a) Funzioni localmente lipschitziane in y ed uniformemente in t, teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy. Soluzioni massimali, loro unicità, teorema di abbandono dei compatti e teorema di estensione globale. Casi di non unicità delle soluzioni e teorema di sola esistenza di Peano, per campi di velocià continui.
(b) Studi qualitativi di equazioni differenziali del primo ordine ed equazioni differenziali a variabili separabili.
(c) Sistemi lineari a coefficienti continui. Struttura dell'insieme delle soluzioni per il caso omogeneo e non omogeneo. Problema di Cauchy per equazioni lineari di ordine n e sua caratterizzazione come speciale sistema lineare del primo ordine. Struttura delle soluzioni per equazioni lineari di ordine n sia nel caso omogeneo che non omogeneo, nozione di integrale generale. Base esplicita di soluzioni per equazioni differenziali lineari omogenee di ordine n a coefficienti costanti. Soluzione particolare quando il termine omogeneo è il prodotto di un polinomio per un esponenziale. Soluzione particolare nel caso generale, tramite variazione delle costanti.
(d) Norma di Frobenius e spazio di Banach delle matrici quadrate. Matrice esponenziale e soluzione di un sistema lineare a coefficienti costanti, sia omogeneo che non omogeneo. Matrice esponenziale definita da n soluzioni di n problemi di Cauchy (con dimostrazione). Speciali soluzioni di sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti tramite autovettori e autovalori della matrice (con dimostrazione). Polinomio caratteristico di una matrice quadrata complessa e autospazi generalizzati. Forma generale per una base di soluzioni di un qualunque sistema di equazioni differenziali lineare omogeneo e a coefficienti costanti.
(e) Sistemi autonomi di equazioni differenziali non lineari e proprietà delle loro soluzioni. Punti di equilibrio di sistemi autonomi: stabili, instabili e asintoticamente stabili. Caratterizzazione della stabilità, instabilità e stabilità asintotica per un qualunque sistema lineare omogeneo di equazioni differenziali a coefficienti costanti. Teorema di stabilità per i punti di equilibrio di sistemi non lineari.

(3) `Successioni e serie di funzioni`

(a) Convergenza puntuale, puntuale assoluta, uniforme e totale per successioni e per serie di funzioni. La convergenza totale implica la convergenza uniforme (con dimostrazione). Limiti uniformi di successioni di funzioni continue sono continui (dimostrazione).
(b) Condizioni per la derivazione e per l'integrazione di successioni e serie di funzioni.
(c) Limite superiore di una successione reale. Serie di potenze reali e complesse e loro raggio di convergenza. Teorema del raggio di convergenza (con dimostrazione).

(4) `Serie di Fourier`

(a) Proprietà delle funzioni T-periodiche e funzioni periodiche localmente sommabili. Serie di Fourier reale, serie di Fourier complessa e loro relazione (con dimostrazione). Relazioni di ortogonalità per funzioni trigonometriche reali e per l'esponenziale complesso.

(b) Funzioni quadrato sommabili su un intervallo, loro prodotto scalare e norma quadratica in $\mathcal{L}^2(a,b)$. Basi ortonormali e convergenza di serie di funzioni in $\mathcal{L}^2(a,b)$. Periodizzate e spazio delle funzioni periodiche localmente quadrato sommabili. Sviluppo in serie di Fourier in $\mathcal{L}^2(a,b)$ per una qualunque funzione di $\mathcal{L}^2_T(\mathbb{R})$, con $T = b - a$.
(c) Condizioni di convergenza della serie di Fourier per funzioni periodiche e derivabili e derivabilità "termine a termine" della serie di Fourier (dimostrazione).

(5) `Funzioni olomorfe`

(a) Derivata complessa e proprietà elementari per le combinazioni lineari complesse, prodotti e composizioni. Funzioni olomorfe e caratterizzazione della derivazione complessa con le equazioni di Cauchy-Riemann (con dimostrazione). Integrale complesso: cambiamento di variabile nella parametrizzazione della curva e integrazione di funzioni aventi primitiva olomorfa (con dimostrazione).
(b) Formula di Cauchy per funzioni olomorfe. Derivabilità complessa delle serie di potenze complesse e formula di derivazione complessa (con dimostrazione). Funzioni analitiche, analiticità delle funzioni olomorfe e formula locale di sviluppo in serie di potenze (con dimostrazione). Singolarità isolate, sviluppo di Laurent e teorema dei residui.

Suggerimenti e indicazioni bibliografiche

Gli argomenti del corso non seguono un testo specifico, è preferibile pertanto riferirsi alle lezioni. Tuttavia i vari argomenti trattati, con possibile diversità di presentazione, si possono trovare in diversi testi universitari per i corsi di Analisi Matematica, tra i quali si segnalano ad esempio i seguenti.

G. De Marco, *Analisi due. Teoria ed esercizi*, Zanichelli - Decibel, 1999

N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica due*, Liguori, 1996

C. D. Pagani, S. Salsa, *Analisi Matematica, Volume 2*, Masson, 1998

M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, *Analisi Matematica 2*, Zanichelli, 2009

Ulteriore materiale sulle funzioni olomorfe si può trovare anche nel testo di G. Gilardi, *analisi tre*, McGraw-Hill, 1994. Per la preparazione negli esercizi relativi al corso, oltre al materiale fornito nelle esercitazioni e nei fogli supplementari di esercizi, si segnalano ad esempio i seguenti testi.

G. De Marco, C. Mariconda, *Esercizi di Analisi due*, Zanichelli - Decibel, 1998

P. Marcellini, C. Sbordone, *Esercizi di matematica*, Volume II, Tomi 1,2,3,4, Liguori, 2009

M. Bramanti, *Esercitazioni di Analisi Matematica 2*, Esculapio, 2012

Prof. Valentino Magnani
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
Largo Bruno Pontecorvo 5, I-56127
email: valentino.magnani@unipi.it