Complementi di Analisi Matematica. Foglio di esercizi n.7
27/3/2017

`Esercizi sulla funzione implicita e superfici`

Esercizio 1 Definiamo l'insieme

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2y - x^3 - z^3 x + y^3 x^2 - z^4 = 0 \right\}.$$

1. Stabilire se S è non vuoto. Dimostrare che esistono un aperto $O \subset \mathbb{R}^2$ e $\varphi \in C^1(O)$ tali che $(x, \varphi(x,z), z) \in S$ per ogni $(x,z) \in O$. Stabilire se $\varphi \in C^{10}(O)$.

2. Trovare il più grande aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi \in C^1(\Omega)$ e $(x, \varphi(x,z), z) \in S$ per ogni $(x,z) \in \Omega$. Stabilire se vale $\{(x, \varphi(x,z), z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in \Omega\} = S$.

3. Calcolare il piano tangente ad S passante per $p = (1,1,1)$.

Esercizio 2 Determinare sia l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ dei $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che

$$M_\lambda = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^6 + \lambda^2 x^2 y^6 + y^2 z^2 + z^6 = 1 \right\} \neq \emptyset.$$

Determinare l'insieme $B \subset A$ dei λ tali che M_λ è una 2-superficie.

Esercizio 3 Consideriamo l'insieme dei punti $M \subset \mathbb{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x^2 - y + z = 4 \\ z^2 - y^2 - 2x = 0 \end{cases}.$$

1. Provare che M è non vuoto, è una 1-superficie.

2. Scegliere un qualunque punto $p \in M$ e determinare lo spazio tangente $T_p M$.

Suggerimento: Provare che una funzione definente M come insieme di livello ha sempre almeno un minore di ordine massimo in ogni punto di M.

Esercizio 4 Si consideri l'equazione $e^z + y \sin z + y^2 - 2y - x^2 = 0$.

1. Si provi che esiste $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 < \delta\}$ con $\delta > 0$ sufficientemente piccolo e un'unica $\varphi \in C^\infty(B)$ tale che i punti $\big(x, y, \varphi(x,y)\big)$ siano soluzioni dell'equazione data per ogni $(x,y) \in B$ e $\varphi(0,1) = 0$.

2. Stabilire se il punto $\xi^0 = (0,1)$ è un punto critico di φ. In tal caso stabilire se è di massimo, minimo, di sella o nessuno di questi, dando un'argomentazione della risposta.

Esercizio 5 Si consideri l'equazione $1 + z^2 + y^2 + \log(1 + \cos^2 x) = e^{x - \frac{\pi}{2}}$.

1. Si provi che esiste $B(0,\delta) \subset \mathbb{R}^2$ e $\varphi : B(0,\delta) \to \mathbb{R}$ tale che i punti $\big(\varphi(y,z), y, z\big)$ siano soluzioni dell'equazione data per ogni $(y,z) \in B(0,\delta)$ e $\varphi(0,0) = \pi/2$.

2. Stabilire se la φ considerata al punto precedente ha un punto critico nell'origine ed in tal caso determinarne la natura.

Esercizio 6 Stabilire se è vero che per ogni intero positivo n l'insieme

$$\Sigma_n = \{(x, y, z) : z - z^3x^2 - y^n = 0\}$$

è una 2-superficie regolare di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 7 Al variare di p nell'insieme $\{(0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2)\}$, stabilire se per ciascun elemento dell'insieme esiste una coppia di variabili rispetto alle quali è possibile rappresentare tutte le soluzioni dell'equazione $e^y + \sin(xyz) = e$ sufficientemente vicine a p. Determinare tali coppie di variabili, nel caso esistano.

Esercizio 8 Consideriamo l'insieme $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2e^y + ye^x = 0\}$. Sia $\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, con $\delta > 0$, una funzione tale che $(t, \varphi(t)) \in \Sigma$ per ogni $t \in (-\delta, \delta)$. Stabilire se tale funzione è unica per δ sufficientemente piccolo, se è derivabile nel corrispondente intervallo $(-\delta, \delta)$ e calcolare $\varphi'(0)$, se esiste. Stabilire se l'origine per φ è un punto di minimo, di massimo o nessuno di questi.

Esercizio 9 Consideriamo l'insieme S dei punti $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ che risolvono il sistema

$$\begin{cases} xy + e^{x+y} + z - 1 = 0 \\ xz + \log(1 - y + yt) - t + 1 = 0 \end{cases}.$$

1. Mostrare che $p_0 = (0, 0, 0, 1)$ è un punto regolare di S.
2. Determinare delle variabili rispetto alle quali S è un grafico per i suoi punti sufficientemente vicini a p_0.
3. Detta φ la funzione implicita rispetto le variabili trovare al punto precedente, calcolare la matrice jacobiana di φ nel punto u_0, tale che $(u_0, \varphi(u_0)) = p_0$.
4. Determinare lo spazio tangente ad S passante per p_0.

Esercizio 10 Consideriamo il sistema non lineare

$$\begin{cases} \sin(xy) + xe^y = e\pi \\ z - x^2 = 0 \end{cases}$$

ed una sua soluzione $p_0 = (\pi, 1, \pi^2)$. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme delle soluzioni di tale sistema.

1. Stabilire se p_0 è regolare per S ed in tal caso determinare le variabili rispetto alle quali S è un grafico per punti di S vicini a p_0.
2. Determinare lo spazio tangente ad S passante per p_0

Esercizio 11 Si consideri il seguente sistema non lineare in quattro variabili

$$\begin{cases} x^4 - y^4 + z^2 = 1 \\ tx^5 - xt^5 + x = 1 \end{cases} .$$

1. Provare che esistono infinite soluzioni del sistema che siano arbitrariamente vicine alla soluzione $p_0 = (1, -1, 1, 1)$, rappresentandole come grafico ed evidenziando la scelta delle variabili indipendenti.

2. Stabilire se esistono altre scelte di variabili per rappresentare le soluzioni sufficientemente vicine a p_0, ed in tal caso evidenziarle.

3. Stabilire se p_0 è un punto k-regolare per l'insieme $S \subset \mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema. In tal caso determinare k e lo spazio tangente $T_{p_0}S$.

Esercizio 12 Consideriamo l'insieme $M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2+e^y+z^2 = 1,\ t^2+\sin x = 0\}$. Provare che M è una superficie di dimensione due in $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 13 Si consideri il polinomio

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - yx^2 - y$$

e sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ il suo luogo di zeri.

1. Determinare in quali punti di S la funzione F definisce implicitamente una curva tramite il teorema della funzione implicita.

2. Trovare i punti 1-regolari di S dove la tangente sia parallela alla retta $y = 0$.

Esercizio 14 Si consideri il polinomio

$$F(x, y, z) = 1/4x^2 + 1/9y^2 + z^2 - 2x - y - 4$$

e si consideri luogo di zeri $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$.

1. Determinare in quali punti di S la funzione F definisce implicitamente una 2-superficie tramite il teorema della funzione implicita. Se tutti i punti sono 2-regolari, riconoscere la superficie definita implicitamente.

2. Trovare i punti 2-regolari di S in cui il piano tangente si parallelo al piano $y = 0$.

3. Trovare i punti 2-regolari di S in cui il piano tangente si parallelo al piano $y = z$.

Esercizio 15 Si consideri l'insieme

$$S = \left\{(\theta \sin\theta \cos\varphi, \theta \sin\theta \sin\varphi, \theta \cos\theta) \in \mathbb{R}^3 : 1 < \theta < 2,\ 0 < \varphi < 2\pi\right\}.$$

1. Provare che S è una 2-superficie regolare (sottovarietà 2-dimensionale di $\mathbb{R}^3$).

2. Determinare lo spazio tangente T_pS e lo spazio tangente passante per $p = \left(-\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$.

Suggerimento: in questo caso è più semplice rappresentare lo spazio tangente come immagine di un opportuno differenziale.