Analisi II. Foglio di esercizi n.6
9/12/2016
(Aggiornamento del 5/3/2017)

`Esercizi sull'integrazione rispetto la misura di superficie`

1. Consideriamo l'*astroide* $\gamma(\varphi) = r(\cos^3\varphi, \sin^3\varphi)$ con $r > 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$.
   (a) Tracciare il grafico della curva nel piano.
   (b) Calcolare l'area dell'insieme limitato A delimitato da tale curva.

   Sugg. Osservare che la curva soddisfa l'equazione $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = r^{2/3}$.

2. Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 0 \text{ e } 0 \leq z \leq 2\}$. Tracciare un grafico qualitativo di Σ e calcolarne l'area.

3. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 + 2x^2 + 2y^2 < z < 2 - 2x^2 - 2y^2\}$. Si tracci il grafico di tale insieme e si calcoli l'area di $\partial\Omega$.

4. Scrivere il valore dell'area del grafico di $u : B \to \mathbb{R}$, dove abbiamo definito $u(x, y) = x + y^2 - x^2 - y$ e
$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}\right\}.$$

5. Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di rotazione ottenuta ruotando $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (0, t^2, t^4 + 1)$ attorno all'asse z. Calcolare l'area di Σ.

6. Sia $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - |z| - \frac{3}{4} < 0,\ |z| < \frac{1}{2}\right\}$. Sia
$$\Sigma = \partial\Omega \setminus \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| = \frac{1}{2}\right\}$$
   e ν la normale esterna di Ω. Dato $F(x, y, z) = (y - z, x + z, z)$, calcolare il flusso $\Phi(F, \Sigma, \nu)$.

7. Data $\Sigma = \{(x, y, z) : 0 = e^{\sin x} - y + \log\left(2 + \cos(zx)\right),\ x^4 + z^4 < 1\}$. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva chiusa e semplice di classe C^1 la cui immagine è ∂H con $H = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + z^4 < 1\}$ e che orienta positivamente tale aperto. Calcolare $\int_{\Phi\circ\gamma} xdx + ydy + zdz$, dove
$$\Phi(x, z) = \left(x, e^{\sin x} + \log\left(2 + \cos(xz)\right), z\right).$$

8. Siano fissati $a, b > 0$ e si consideri

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}.$$

Si calcoli l'area di E sia direttamente come integrale di Lebesgue che utilizzando la formula di Gauss-Green, ovvero scegliendo una 1-forma differenziale d'area e parametrizzando ∂E.

9. Si consideri di nuovo la curva $\gamma(\varphi) = r(\cos^3\varphi, \sin^3\varphi)$ definita su $[0, 2\pi]$, con $r > 0$. Utilizzando la sola la funzione che definisce tale curva, calcolare l'area dell'insieme A che essa delimita, senza utilizzare quindi l'equazione cartesiana suggerita nell'Esercizio 1.

10. Consideriamo il campo vettoriale $F(x, y) = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$ e l'aperto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1,\ y - x < 1,\ y > 0\}.$$

Sia Γ la curva C^1 a tratti e semplice, la cui immagine è $\partial\Omega$ e che percorre tale insieme in senso antiorario. Calcolare $\int_\Gamma F$.

11. Calcolare l'area dell'insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ delimitato dalle curve $\gamma(t) = (t^2 e^t, t^2)$ su $[0, 1]$ e $c(t) = (te, t)$ su $[0, 1]$.

12. Consideriamo il seguente insieme aperto

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 - 4 < 0 \text{ e } x^2 + z^2 - 1 < y < 5\}$$

e sia ν la sua normale esterna nei punti di frontiera regolare. Introduciamo il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2z}{y + 2}, 1 + x^3 \sin(y\pi), \frac{xz}{y + 4} \right),$$

il quale è ben definito su $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y < 5\} \cap \partial\Omega$. Calcolare $\int_\Sigma \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle \, d\sigma$.

13. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1\}$ e definiamo il campo vettoriale $F(x, y, z) = (xz, xy, 1)$. Considerando la superficie elementare

$$\Sigma = \left\{ (x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \right\}$$

e la normale esterna ν ad Ω, calcolare il flusso $\int_\Sigma \langle F, \nu \rangle \, d\sigma$.

14. Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 < y < 4,\ y > 1\}$ e si consideri il campo vettoriale $F(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}(x,0,z)$, il quale è ben definito su

$$\Sigma = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < y < 4\Big\} \cap \partial\Omega.$$

Calcolare il flusso $\int_\Sigma \langle F, \nu \rangle d\sigma$, dove ν è la normale esterna ad Ω e σ denota la misura di superficie 2-dimensionale.

15. Consideriamo la superficie elementare con bordo

$$\Sigma = \{(x,y,z) : x+2y+3z = 1, x,y,z \geq 0\}.$$

(a) Sia γ la curva C^1 a tratti, semplice e chiusa, la cui immagine è il bordo $\partial\Sigma$ e che passa nell'ordine per $(1,0,0)$, $(0,1/2,0)$ e $(0,0,1/3)$. Calcolare la circuitazione $\int_\gamma ydx - xdy + ydz$, sia per calcolo diretto che attraverso un opportuno utilizzo del teorema di Stokes.

(b) Data ν normale a Σ tale che abbia seconda componente positiva e dato $F(x,y,z) = (x-y, y+z, x+y)$, calcolare il flusso $\Phi(F,\Sigma,\nu)$.

16. Consideriamo l'insieme

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2-(x-1)^2 = 0,\ |x| \leq 1\}$$

ed il campo vettoriale $F = (xyz+yz, xz+x^4, 2x^2zy)$.

(a) Si tracci un grafico qualitativo di tale insieme.

(b) Calcolare $\int_\Sigma \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle\, d\sigma$, dove ν è la normale a Σ nei punti 2-regolari e la cui prima componente è positiva.

17. Si consideri l'insieme $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ y+z \leq 2, z \geq 0\}$.

(a) Tracciare un grafico qualitativo di C, determinando il suo bordo e provando che è costituito da curve regolari.

(b) Determinare una parametrizzazione γ della parte superiore del bordo tale che la sua composizione con la proiezione sul piano xy determini una curva orientata in senso antiorario.

(c) Calcolare la circuitazione $\int_\gamma x^2(1-z)dx + y^2(1-z)dy + (x^2+y^2)dz$, sia direttamente che utilizzando opportunamente il teorema di Stokes.

Suggerimento: Occorre trovare la giusta scelta della normale ν a C.

18. Consideriamo gli aperti

$$\Omega_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|,|y|\} < 2 \text{ e } 0 < z < 1\},$$
$$\Omega_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4 \text{ e } z > 0\}$$

e si definisca $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Dati $F(x,y,z) = (x, x, zxy)$ e

$$\Sigma = \overline{(\partial\Omega) \setminus \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x,y \in \mathbb{R}\}}$$

superficie regolare a tratti, con normale esterna ν ad Ω nei punti $\partial_{reg}\Omega$, si calcoli

$$\int_\Sigma \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle \, d\sigma.$$

19. Dati $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 1 < z < 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ ed il campo

$$F(x,y,z) = \big(z^5 + e^y + xy, \log(2+z) + y, x^7y^3 + zx^3\big),$$

calcolare $\Phi(F, \partial\Omega, \nu)$, dove ν è la normale esterna su $\partial_{reg}\Omega$.

20. Consideriamo l'insieme

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0, \ x \leq 2^{-1}, \ y \leq 2^{-1}\}.$$

   (a) Tracciare un grafico qualitativo di Σ.

   (b) Orientando Σ con la normale $\nu(x,y,z) = (x,y,z)$, calcolare

$$\int_{\partial^+_\nu \Sigma} y dx + (x - z^2) dy + xz dz\,.$$

21. Consideriamo l'insieme aperto

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} < 1, \ x^2 + (y-2)^2 + z^2 > 1\right\},$$

ed il campo $F(x,y,z) = (x+y, y-2, z-xy)$.

   (a) Tracciare un grafico qualitativo di Ω.
   Suggerimento: Provare che $\partial B((0,2,0),1)$ è contenut nell'aperto $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} < 1\}$.

   (b) Determinare $\partial\Omega$, $\partial_{reg}\Omega$ e la normale esterna ν ad Ω.

   (c) Calcolare sia $\Phi(F, \partial\Omega, \nu)$ che $\Phi(F, \Sigma, \nu)$, dove $\Sigma = \partial H$.