Analisi II. Foglio di esercizi n.4
31/10/2016
(Aggiornamento del 11/11/2016)

`Esercizi su integrali curvilinei e potenziali`

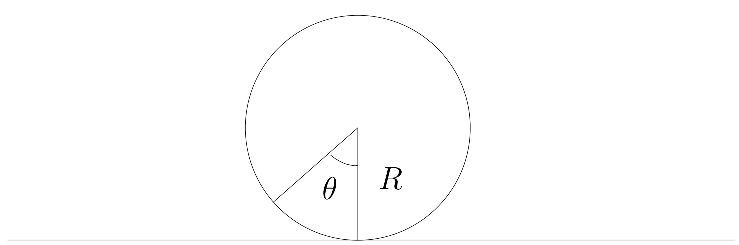
1. Provare che $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, |t|)$, è C^1 a tratti su $\mathbb{R}$. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ calcolarne la lunghezza della restrizione $\gamma|_{[a,b]}$.

2. Si consideri la curva $\gamma(t) = (2\cos t, \sin t)$ su $[0, 2\pi]$ e si calcoli
$$\int_\gamma (1 + 3y^2)^{-1/2}\, ds.$$

3. Consideriamo $\Gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, ove $\Gamma(t) = \left(e^t, t^2\right)$ per ogni $t \in [0, 1]$. Scrivere il valore di $\int_\Gamma \sqrt{4y + x^2}\, ds$.

4. Dati $L > 0$ e $\gamma(t) = (t, 1 - t)$ su $[0, L]$, calcolare
$$\int_\gamma (e^{|y|} - x)\, ds.$$

5. Si consideri la "cicloide", ovvero la curva ottenuta da un punto fissato ad una ruota che rotola su una retta senza slittamenti. Verificare che il punto ha coordinate
$$\gamma(\theta) = (R\theta - R\sin\theta, R - R\cos\theta).$$
Calcolare la lunghezza del tratto percorso dal punto sulla ruota, quando ha compiuto un intero giro.



6. Data $\gamma : [-2, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \left(t^2, t^2|1+t|, \frac{t^3}{3}\right)$. Provare che γ è C^1 a tratti.

7. Calcolare la lunghezza di $\gamma : [\frac{1}{\sqrt{15}} - \frac{1}{4}, \frac{2}{\sqrt{15}} - \frac{1}{4}] \to \mathbb{R}^3$, definita come
$$\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{2}{\sqrt{15}}t^2 + \sqrt{\frac{5}{3}}\,t^3, \frac{t^3}{3}\right).$$
Sugg. Usare la formula $\int_0^t \sqrt{1 + x^2}dx = \dfrac{1}{2}\left(\log(t + \sqrt{1 + t^2}) + t\sqrt{1 + t^2}\right)$.

8. Calcolare la lunghezza di $\gamma : [-2, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t^2, t^3, t^3)$.

9. Data la 1-forma differenziale $\eta_0 = -\dfrac{y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$ e consideriamo

$$\gamma(t) = (t^2 + \log(e^t + t^8))\,(\cos t, \sin t)$$

definita su $(0, 2\pi)$. Calcolare, se esiste,

$$\int_\gamma \eta_0 := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\gamma|_{[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]}} \eta_0$$

Sugg. Considerare la funzione arcocoseno.

10. Data $\gamma(t) = (t, 1-t, t^2)$ su $[0, \sqrt{2}]$, calcolare $\int_\gamma \left(|x+y| + \sqrt{|z|}\right) ds$.

Sugg. Usare la formula $\int_0^t \sqrt{1+x^2}dx = \dfrac{1}{2}\left(\log(t + \sqrt{1+t^2}) + t\sqrt{1+t^2}\right)$.

11. Si consideri la curva $\gamma(t) = (\log(1+e^t), 1, \cos(\pi t))$ su $[0, 1]$ e si calcoli $\int_\gamma F$, ove $F = \left(\dfrac{z}{y}, -\dfrac{xz}{y^2}, \dfrac{x}{y}\right)$.

12. Si consideri la seguente curva $\gamma(t) = \left(-t^3, 2e^{\sin(\pi t)}, \sin(\pi t)\right)$ su $[0, 1]$. Si calcoli l'integrale $\int_\Gamma F$, ove $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è definita come

$$F = \left(\frac{x^3}{1+x^4+y^4+z^4}, \frac{y^3}{1+x^4+y^4+z^4}, \frac{z^3}{1+x^4+y^4+z^4}\right).$$

13. Stabilire se esistono e nel caso determinare gli α reali tali che il campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, ove

$$F(x, y) = \left(\frac{\alpha y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right),$$

sia conservativo in $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$. Per tali α, nel caso esistano, calcolare un potenziale di F su Ω.

14. Stabilire se il campo vettoriale

$$F(x, y) = \big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\big)$$

è conservativo sull'aperto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, dandone una breve argomentazione. Data la curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \big((1-t)\cos(\pi - t\pi), 1 + (1-t)\sin(\pi - t\pi)\big),$$

scrivere il valore dell'integrale $\int_\gamma F$.

15. Scrivere l'unica funzione potenziale $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ del campo
$$F(x,y) = \left(\frac{\cos(x+y)}{2+\sin(x+y)}, \frac{\cos(x+y)}{2+\sin(x+y)} \right)$$
tale che $V(0,0) = \log 4$.

16. Sia data la 1-forma differenziale $\omega = \dfrac{dx}{(1+y)(1+x)^2} + \dfrac{dy}{(1+x)(1+y)^2}$. Definendo la curva $\gamma : [0, \sqrt{\pi}] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(e^{\sin(t^2)}, e^{\cos(t^2)}\right)$, si scriva il valore di $\int_\gamma \omega$.

17. Consideriamo $F(x,y) = (x+y, x-y)$ e $\gamma(t) = (t, e^t)$ su $[0,1]$.
    (a) Stabilire se F è conservativo in $\mathbb{R}^2$.
    (b) Calcolare $\int_\gamma F$.

18. Consideriamo la forma differenziale
$$\omega = \left(2xyz + y^2 z - y + 2z\right)dx + \left(x^2 z + 2xyz - x - 4\right)dy + \left(x^2 y + xy^2 + 2x + 1\right)dz$$
e la curva $\gamma(t) = (\sin t, t, e^t)$ su $[0, \pi]$.
    (a) Stabilire se ω è esatta in $\mathbb{R}^3$.
    (b) Calcolare $\int_\gamma \omega$.

19. Sia data la 1-forma differenziale $\omega_\alpha = xydx + dy + \frac{\alpha x^2}{2} dy$.
    (a) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la 1-forma differenziale ω_α è esatta in $\mathbb{R}^2$.
    (b) Per tali $\alpha \in \mathbb{R}$ determinarne una primitiva f_α.

20. Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sia data la 1-forma differenziale
$$\omega_{\alpha,\beta} = y(x-z)dx + (\alpha x^2 + \beta z^2 - xz)dy + y(z-x)dz.$$
    (a) Determinare per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la 1-forma differenziale $\omega_{\alpha,\beta}$ è esatta in $\mathbb{R}^3$.
    (b) Per tali α, β determinarne una primitiva di ω_α e calcolare $\int_\gamma \omega_{\alpha,\beta}$, dove abbiamo definito $\gamma(t) = (t, \operatorname{tg} t, \sin t)$ su $[0, \pi/4]$

21. Consideriamo $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$,
$$F(x,y,z) = \left(\frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, -\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}, -\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \right).$$
Stabilire se F è conservativo in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ ed in tal caso determinarne un potenziale.

22. Determinare il più grande dominio della 1-forma differenziale

$$\omega = -\frac{x}{x^2-y^2-z^2}dx + \frac{y}{x^2-y^2-z^2}dy + \frac{z}{x^2-y^2-z^2}dz$$

e stabilire se ha una primitiva in tale dominio.

23. Determinare tutti i valori $p \in \mathbb{R}$ tali che il campo vettoriale

$$F = \left(\tfrac{x}{(x^2+y^2+z^2+t^2)^p}, \tfrac{y}{(x^2+y^2+z^2+t^2)^p}, \tfrac{z}{(x^2+y^2+z^2+t^2)^p}, \tfrac{t}{(x^2+y^2+z^2+t^2)^p}\right)$$

sia conservativo in $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$ e per essi determinarne un potenziale.

24. **(Avanzato)** Consideriamo l'aperto $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y \neq 0\}$ ed il campo $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definito come segue

$$F(x,y) = \left(\frac{\sigma_y |y|^q}{(x^2+y^2)^p}, \frac{\sigma_x |x|^q}{(x^2+y^2)^p}\right),$$

dove $p, q \in \mathbb{R}$. La funzione segno soddisfa $\sigma_t = 1$ se $t > 0$, $\sigma_0 = 0$ e $\sigma_t = -1$ se $t < 0$. Determinare per quali coppie (p,q) il campo F è conservativo, ed in tal caso calcolarne la funzione potenziale.