Analisi II. Foglio di esercizi n.3
17/10/2016
(Aggiornamento del 11/11/2016)

`Esercizi su differenziabilità, massimi e minimi`

1. Consideriamo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita come
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{diversamente} \end{cases} .$$
   (a) Determinare il più grande aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tale che $f \in C^1(\Omega)$.
   (b) Determinare il più grande aperto di $\mathbb{R}^2$ tale che f è differenziabile in ogni punto di tale aperto.

2. Consideriamo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita come
$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{diversamente} \end{cases} .$$
   (a) Trovare il più grande aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tale che $f \in C^1(\Omega)$, ovvero trovare i punti dove le derivate parziali esistono ma non sono continue.
   (b) Trovare il più grande aperto di $\mathbb{R}^2$ dove f sia ovunque differenziabile.
   (c) Concludere che f è ovunque differenziabile in $\mathbb{R}^2$, ma non ha le derivate parziali continue nell'origine.

3. Consideriamo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita come
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{diversamente} \end{cases} .$$
   (a) Provare che f è continua nell'origine.
   (b) Stabilire se f ha tutte le derivate direzionali in ogni punto di $\mathbb{R}^2$.
   (c) Studiare la differenziabilità di f su $\mathbb{R}^2$.
   (d) Concludere che f è continua ed ha tutte le derivate parziali nell'origine, ma non è differenziabile in tale punto.

4. Consideriamo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita come
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{diversamente} \end{cases} .$$

(a) Studiare la continuità di f in $\mathbb{R}^2$.

(b) Studiare l'esistenza di tutte le derivate direzionali di f in ogni punto di $\mathbb{R}^2$.

(c) Studiare la differenziabilità di f in ogni punto di $\mathbb{R}^2$.

(d) Determinare il più grande aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tale che $f \in C^1(\Omega)$.

5. Dato il multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, per $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definiamo il monomio
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$
Ad esempio $(x, y, z)^{(1,2,3)} = xy^2z^3$. Definendo il *peso* del multi-indice α come $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_n$, possiamo scrivere il polinomio $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di grado k come
$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha x^\alpha.$$
Ad esempio $p_1(x, y, z) = x^2yz + y + z^6y - 1$, $p_2(x, y) = x^2y - y^6x + y + 1$ sono polinomi rispettivamente di tre variabili e due variabili ed entrambi sono di grado 7.

Provare che una qualunque funzione polinomiale $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ appartiene a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

6. Data $f(x, y, z) = \frac{1}{2}[(x - y - z)^2 + (x + y + z)^2]$.

(a) Determinare i punti critici di f.

(b) Determinare i punti di massimo e minimo di f.

(c) Stabilire se esiste $\lim_{(x,y,z)\to\infty} f(x, y, z)$, ed in tal caso calcolarlo.

7. **(Avanzato)** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come
$$f(x, y) = \begin{cases} x - y \arctan(x/y) & y \neq 0 \\ x & y = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare sia l'insieme dove f è continua che l'insieme dove f è differenziabile.

(b) Stabilire se f ha massimo e minimo su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ e nel caso determinarli.

Sugg. Nei punti di ∂D rappresentare la funzione nelle coordinate polari $x = \sin t$ e $y = \cos t$. Osservare inoltre che f è pari rispetto la variabile y.

8. Provare che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita come segue
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
appartiene a $C^1(\mathbb{R}^2)$, ma non è in $C^2(\mathbb{R}^2)$.

9. Calcolare la matrice hessiana di $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

10. Scrivere l'immagine della funzione $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2y - x^3 + 1$.

11. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita come $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2+1}$. Si determini l'immagine $f(\mathbb{R}^2)$.

12. Si consideri $f(x,y,z) = \sin(e^{x^2+y^2+z^2})$ definita sull'insieme
$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq \log\pi + \log\frac{1}{2}\right\}.$$
    (a) Determinare tutti i punti critici di f.
    (b) Determinare il massimo ed il minimo di f
    (c) Determinare tutti i punti di massimo ed i punti di minimo di f.

13. Scrivere il massimo ed il minimo di
$$f(x,y,z) = z^2 + \sin\left(\frac{x+y^2}{2}\right)$$
su $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$, evidenziando i principali passaggi che hanno portato alla determinazione di tali valori.

    Sugg. Controllare l'esistenza dei punti critici prima nella parte interna $\mathring{D}$. Dedurre quindi l'esistenza del massimo e del minimo nei punti di ∂D. Osservare che sin è monotona crescente in $[-1,1]$. Si osservi che non occorre utilizzare la matrice hessiana per la risoluzione di questo esercizio.

14. Consideriamo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = y\sin x + z^2$.
    (a) Determinare $\sup_{\mathbb{R}^2} f$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f$.
    (b) Determinare massimi e minimi locali e globali, nel caso esistano.
    (c) Determinare i punti di massimo e di minimo locale e globale, nel caso esistano.

15. Scrivere l'immagine di $f(x,y) = -\sin^2(x-y)$, definita su $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$.

16. Sia data $f(x,y) = \dfrac{e^{-x^4}}{1+|x|+|y|}$. Si determini $f(\mathbb{R}^2)$.

17. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $f(x,y) = x^3 - xy^2 + 2x^2 + y^2$.

    (a) Determinare $\sup_{\mathbb{R}^2} f$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f$.

    (b) Determinare massimi e minimi locali e globali, nel caso esistano.

    (c) Determinare i punti di massimo e di minimo locale e globale, nel caso esistano.

18. Definiamo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 + 2x^2 + zy^2$.

    (a) Stabilire se esiste il limite di f per $(x,y,z) \to \infty$.

    (b) Determinare $\sup_{\mathbb{R}^3} f$ e $\inf_{\mathbb{R}^3} f$.

    (c) Determinare tutti i punti critici.

    (d) Stabilire se la matrice hessiana in tali punti è definita positiva, definita negativa, invertibile o diversamente.

19. Determinare l'immagine di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita come $f(x,y) = xye^{-4x^2-y^2}$.

20. **(Avanzato)** Sia $f(x,y) = |2 - xy| + x(y + \log x)^2$.

    (a) Determinare il più grande dominio di f.

    (b) Determinare i punti di massimo o minimo locale o di sella, se esistono.

    (c) Determinare l'immagine di f.