Programma d'esame di

Analisi Matematica II e Complementi di Analisi Matematica

per i corsi di laurea triennale in Ingegneria Chimica ed Ingegneria dell'Energia

Anno Accademico 2015/2016

(1) `Topologia di` $\mathbb{R}^n$

(a) Distanza euclidea, prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Successioni e loro limiti in $\mathbb{R}^n$. Nozioni di insiemi aperto, insieme chiuso, chiusura di un insieme per successioni e loro proprietà. Punti di accumulazione, isolati, e di frontiera. Parte interna e frontiera di un insieme in $\mathbb{R}^n$. Insiemi connessi e connessi per archi.
(b) Limiti di più variabili reali, unicità e teorema di permanenza del segno. Funzioni continue e operazioni elementari tra funzioni continue. L'immagine reale e continua di un insieme connesso per archi è un intervallo di $\mathbb{R}$ (con dimostrazione).
(c) Insiemi compatti in $\mathbb{R}^n$ definiti per successioni e loro caratterizzazione come insiemi chiusi e limitati. Teorema di Weierstrass.

(2) `Differenziabilità e sviluppi di Taylor`

(a) Derivata parziale, derivata direzionale e differenziale per funzioni reali e vettoriali di più variabili reali. Gradiente di funzioni differenziabili reali e matrice jacobiana di funzioni differenziabili vettoriali. La continuità segue dalla differenziabilità (con dimostrazione). Relazione tra differenziale e gradiente (con dimostrazione).
(b) La continuità delle derivate parziali implica la differenziabilità (con dimostrazione in $\mathbb{R}^2$). Le derivate parziali si annullano nei punti di massimo o minimo locale (con dimostrazione).
(c) Derivate parziali di ordine superiore, differenziabilità di ordine k, teorema di Schwarz e classi di funzioni $C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$.
(d) Matrici simmetriche e loro positività, matrice hessiana e criterio di Sylvester. Condizioni sufficienti per l'esistenza di massimi o di minimi locali (con dimostrazione), punti di sella.
(e) Sviluppi di Taylor con resto secondo Peano e secondo Lagrange per funzioni di più variabili reali (con dimostrazione).
(f) Differenziabilità della composizione di funzioni vettoriali differenziabili. Definizione di matrice jacobiana e formula per il calcolo della matrice jacobiana di una composizione di funzioni differenziabili.
(g) Sistemi di coordinate sferiche, cilindriche, polari e loro matrice jacobiana.

(3) `Integrali curvilinei, campi vettoriali, forme differenziali e potenziali`

(a) Curve C^1 a tratti in $\mathbb{R}^n$ e formula per il calcolo della loro lunghezza.
(b) Integrale curvilineo di funzione scalare e sua invarianza per cambio di parametrizzazione della curva (con dimostrazione).
(c) Campi vettoriali conservativi e campi vettoriali chiusi, campi vettoriali radiali.
(d) Spazio duale di $\mathbb{R}^n$ e base duale rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^n$, 1-forme differenziali chiuse, esatte e primitive di 1-forme differenziali.
(e) Integrali curvilinei di campi vettoriali e di 1-forme differenziali. Loro dipendenza dalla sola orientazione della parametrizzazione della curva. Corrispondenza tra integrali curvilinei di campi vettoriali e di 1-forme differenziali.

(f) Caratterizzazioni di campi vettoriali conservativi e di 1-forme differenziali esatte su un aperto di $\mathbb{R}^n$ (con dimostrazione).
(g) Curve omotope ad un punto, insiemi semplicemente connessi ed esempi. Caratterizzazione di campi conservativi e di 1-forme differenziali esatte su aperti semplicemente connessi.
(h) Cambio di variabile in una 1-forma differenziale. Esattezza, chiusura e primitiva di una preimmagine di una 1-forma differenziale.

(4) `Integrazione secondo Lebesgue`

(a) Misura di Lebesgue, sua monotonia e subadditività numerabile (dimostrazione). Insiemi misurabili secondo Lebesgue e insiemi trascurabili. Teorema di Carathèodory sulla famiglia dei misurabili e l'additività numerabile della misura di Lebesgue. Esistenza di insiemi non misurabili. Misurabilità degli insiemi aperti e operazioni insiemistiche che preservano la misurabilità.
(b) Funzioni misurabili secondo Lebesgue: le funzioni continue fuori da un insieme di misura nulla sono misurabili (con dimostrazione). Combinazioni lineari e prodotti di funzioni misurabili, ove ben definiti, sono misurabili. Funzioni semplici, integrale di Lebesgue e funzioni integrabili secondo Lebesgue.
(c) Le funzioni integrabili secondo Riemann sono integrabili secondo Lebesgue (dimostrazione facoltativa). Relazione tra integrabilità secondo Riemann in senso improprio e integrabilità secondo Lebesgue. Teorema di Tonelli e teorema di Fubini. Teoremi di cambiamento di variabile per funzioni sommabili e per funzioni misurabili non negative.

(5) `Misura di area ed elementi di Analisi Vettoriale`

(a) Jacobiano di una mappa da un aperto di $\mathbb{R}^2$ ad $\mathbb{R}^3$, formula per la misura di area in $\mathbb{R}^3$ data da un'immagine iniettiva di funzione differenziabile. Integrale di superficie per una funzione reale continua su tali immagini iniettive di funzioni differenziabili. Cenno all'esistenza di una misura 2-dimensionale in $\mathbb{R}^3$ che coincide con la misura di area per immagini iniettive di funzioni differenziabili.
(b) Superfici in $\mathbb{R}^3$ e spazi tangenti. Punti di frontiera regolari e singolari per un insieme aperto. Normale esterna ad un insieme aperto in un punto regolare. Superfici regolari a pezzi e orientate. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie e teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$.
(c) Orientazione positiva per il bordo di un aperto del piano la cui frontiera è un'unione finita di curve C^1 a tratti. Teorema di Gauss-Green. Prodotto vettoriale e sue proprietà algebriche e geometriche. Rotore di un campo vettoriale. Superfici con bordo, punti di bordo e punti di bordo regolare. Orientazione indotta sul bordo di una superficie orientata da una normale. Teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$.

(6) `Varietà in` $\mathbb{R}^n$ `e moltiplicatori di Lagrange`

(a) Funzione definente, punto k-regolare e superficie di dimensione k in $\mathbb{R}^n$.
(b) Teorema della mappa implicita per funzioni vettoriali.
(c) Definizioni equivalenti di k-superfici in $\mathbb{R}^n$ e parametrizzazioni locali. Spazio tangente di una k-superficie di $\mathbb{R}^n$ in un punto, sia come nucleo di mappa lineare, che come immagine di mappa lineare, ovvero in forma parametrica.
(d) Punti critici di funzioni reali su k-superfici di $\mathbb{R}^n$. I punti di massimo e di minimo locali di funzioni in punti regolari di un insieme sono critici (con dimostrazione).

(e) Teorema dei moltiplicatori di Lagrange per funzioni reali su k-superfici (con dimostrazione), ovvero caratterizzazione dei punti critici con un sistema non lineare.

(7) `Equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie`

(a) Spazi metrici completi, spazi funzionali e contrazioni tra spazi metrici. Esistenza ed unicità per il problema di Cauchy (con dimostrazione). Soluzione massimale, sua unicità, teorema di abbandono dei compatti e teorema di estensione globale.
(b) Studi qualitativi di equazioni differenziali del primo ordine ed equazioni differenziali a variabili separabili.
(c) Sistemi lineari a coefficienti continui. Struttura dell'insieme delle soluzioni per il caso omogeneo e non omogeneo. Problema di Cauchy per equazioni lineari di ordine n e sua caratterizzazione come speciale sistema lineare del primo ordine. Struttura delle soluzioni per equazioni lineari di ordine n sia nel caso omogeneo che non omogeneo, nozione di integrale generale. Base esplicita di soluzioni per equazioni differenziali lineari omogenee di ordine n a coefficienti costanti. Soluzione particolare quando il termine omogeneo è il prodotto di un polinomio per un esponenziale. Soluzione particolare nel caso generale, tramite variazione delle costanti.
(d) Norma di Frobenius e spazio di Banach delle matrici quadrate. Matrice esponenziale e soluzione di un sistema lineare a coefficienti costanti, sia omogeneo che non omogeneo. Matrice esponenziale definita da n soluzioni di n problemi di Cauchy (con dimostrazione). Speciali soluzioni di sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti tramite autovettori e autovalori della matrice (con dimostrazione). Polinomio caratteristico di una matrice quadrata complessa e autospazi generalizzati. Forma generale per una base di soluzioni di un qualunque sistema di equazioni differenziali lineare omogeneo e a coefficienti costanti.
(e) Sistemi autonomi di equazioni differenziali non lineari e proprietà delle loro soluzioni. Punti di equilibrio di sistemi autonomi: stabili, instabili e asintoticamente stabili. Caratterizzazione della stabilità, instabilità e stabilità asintotica per un qualunque sistema lineare omogeneo di equazioni differenziali a coefficienti costanti.

(8) `Successioni e serie di funzioni`

(a) Nozioni di convergenza puntuale, uniforme e totale per successioni e per serie di funzioni. La convergenza totale implica la convergenza uniforme (con dimostrazione). Limiti uniformi di successioni di funzioni continue sono continui (dimostrazione facoltativa).
(b) Convergenza puntuale, uniforme e totale per serie di funzioni complesse. Limite superiore di una successione reale. Serie di potenze reali, serie di potenze complesse e loro raggio di convergenza. Teorema del raggio di convergenza (con dimostrazione).

(9) `Serie di Fourier`

(a) Proprietà delle funzioni T-periodiche, serie di Fourier reale e complessa, formula trigonometrica per il nucleo di Dirichlet e lemma di Riemann-Lebesgue.
(b) Criterio di convergenza puntuale di Dini (dimostrazione facoltativa). Convergenza puntuale per funzioni T-periodiche con derivata limitata ed esistenza di limiti destro e sinistro nel punto dato (con dimostrazione).
(c) Relazione tra i coefficienti della serie di Fourier complessa e quella reale (con dimostrazione).
(d) Derivabilità della serie di Fourier per singoli termini (dimostrazione facoltativa).

(10) `Funzioni olomorfe`

   (a) Derivata complessa e funzioni olomorfe. Proprietà elementari della derivata complessa per combinazioni lineari complesse, prodotti e composizioni di funzioni olomorfe. Equazioni di Cauchy-Riemann per funzioni olomorfe (con dimostrazione).
   (b) Integrali complessi e formula di integrazione per funzioni aventi una primitiva olomorfa (con dimostrazione). Funzioni analitiche ed analiticità delle funzioni olomorfe. Formula per lo sviluppo in serie di potenze complesse di una funzione olomorfa. Formula di Cauchy, singolarità isolate e teorema dei residui.

Suggerimenti e indicazioni bibliografiche

Gli argomenti del corso non seguono un testo specifico, è preferibile pertanto riferirsi alle lezioni. Tuttavia i vari argomenti trattati, con possibile diversità di presentazione, si possono trovare in diversi testi universitari per i corsi di Analisi Matematica, tra i quali si segnalano ad esempio i seguenti.

G. De Marco, *Analisi due. Teoria ed esercizi*, Zanichelli - Decibel, 1999

N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica due*, Liguori, 1996

C. D. Pagani, S. Salsa, *Analisi Matematica, Volume 2*, Masson, 1998

Ulteriore materiale sulle funzioni olomorfe si può trovare anche nel testo di G. Gilardi, *analisi tre*, McGraw-Hill, 1994. Per la preparazione negli esercizi relativi al corso, oltre al materiale fornito nelle esercitazioni e nei fogli supplementari di esercizi, si segnalano ad esempio i seguenti testi.

G. De Marco, C. Mariconda, *Esercizi di Analisi due*, Zanichelli - Decibel, 1998

P. Marcellini, C. Sbordone, *Esercizi di matematica*, Volume II, Tomi 1,2,3,4, Liguori, 2009

M. Bramanti, *Esercitazioni di Analisi Matematica 2*, Esculapio, 2012

Prof. Valentino Magnani
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
Largo Bruno Pontecorvo 5, I-56127
email: magnani@dm.unipi.it