Prova scritta di Analisi Matematica I del 28.01.14.

Soluzioni.

Esercizio 1. Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso
$$\left(\frac{-2-\sqrt{15}+2i\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{4+i2\sqrt{5}}\right)^{106}.$$

Soluzione. Semplifichiamo la frazione z fra parentesi. Si ha
$$(4+i2\sqrt{5})z := -(2+\sqrt{15})+i(2\sqrt{3}-\sqrt{5}),$$
quindi
$$\begin{gathered}(4-i2\sqrt{5})(4+i2\sqrt{5})z = 36z = (4-i2\sqrt{5})\big[-(2+\sqrt{15})+i(2\sqrt{3}-\sqrt{5})\big] = \\ \big[-4(2+\sqrt{15})+2\sqrt{5}(2\sqrt{3}-\sqrt{5})\big]+i\big[2\sqrt{5}(2+\sqrt{15})+4(2\sqrt{3}-\sqrt{5})\big] = \\ \big(-8-4\sqrt{15}+4\sqrt{15}-10\big)+i\big(4\sqrt{5}+10\sqrt{3}+8\sqrt{3}-4\sqrt{5}\big) = \\ -18+18\sqrt{3}i\ .\end{gathered}$$
Perciò $z = -1/2+i\sqrt{3}/2 = \cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3) = e^{2\pi i/3}$; $z^3 = 1$ e finalmente $z^{106} = z^{3\cdot 35+1} = (z^3)^{35}z = z$.

Esercizio 2. Stabilire se l'integrale
$$\int_1^{+\infty}\frac{e^{-2t}+1}{e^t-1}\,dt$$
è convergente e in tal caso calcolarne il valore.

Soluzione. Il cambio di variabile $x := e^{-t}$, $dx = -e^{-t}dt$ riconduce l'integrale improprio ad un integrale di Riemann di una funzione razionale regolare sull'intervallo $[0,1/e]$:
$$\begin{gathered}\int_1^{+\infty}\frac{e^{-2t}+1}{e^t-1}\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_1^T\frac{e^{-2t}+1}{e^t-1}\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_1^T\frac{e^{-2t}+1}{1-e^{-t}}e^{-t}\,dt = \\ \lim_{T\to\infty}-\int_{e^{-1}}^{e^{-T}}\frac{x^2+1}{1-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_{e^{-T}}^{e^{-1}}\frac{x^2+1}{1-x}\,dx = \int_0^{e^{-1}}\frac{x^2+1}{1-x}\,dx = \\ \int_0^{e^{-1}}\frac{2-(1-x)(1+x)}{1-x}\,dx = \int_0^{e^{-1}}\left(\frac{2}{1-x}-1-x\right)dx = \\ \Big[-2\log(1-x)-x-x^2/2\Big]_0^{e^{-1}} = -2\log(1-e^{-1})-e^{-1}-e^{-2}/2 = \\ 2-2\log(e-1)-\frac{1}{e}-\frac{1}{2e^2}\ .\end{gathered}$$

Esercizio 3. Definiamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come segue

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x^2} - \cos(2x) + x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

Stabilire se l'origine sia un punto di massimo o di minimo locale, o nessuno dei due.

Soluzione. Dagli sviluppi di Taylor in zero dell'esponenziale e del coseno si ha:

$$e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + \frac{(2x^2)^2}{2} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)$$

rispettivamente

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{16x^4}{24} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$$

per $x \to 0$. Si ha perciò, essendo $\sin(1/x) \geq -1$

$$f(x) = \Big(\frac{4}{3} + \sin\big(\frac{1}{x}\big) + o(1)\Big)x^4 \geq \left(\frac{1}{3} + o(1)\right)x^4 .$$

Poiché questa quantità è positiva in un intorno di 0 concludiamo che $x = 0$ è **un punto di minimo locale stretto** per la funzione $f(x)$.