

## ESERCITAZIONE MATLAB 1: Vettori, matrici ed aritmetica finita

1. Generare il vettore riga  $x$  ed il vettore colonna  $y$  contenenti i punti equispaziati  $1, 2, \dots, 10$  e  $10, 9, \dots, 1$ , rispettivamente. Generare inoltre il vettore colonna  $z$  contenente 13 punti equispaziati nell'intervallo  $[0, 1]$ .
2. Dato il vettore  $x$  di elementi  $-5, -4, \dots, 8, 9$  determinare l'elemento massimo, minimo, di valore assoluto massimo, di valore assoluto minimo, la somma degli elementi, la somma dei valori assoluti degli elementi.
3. Dato il vettore  $z=[50:-5:10]$  cosa restituiscono i seguenti comandi MATLAB?
  - a) `length(z)`
  - b) `z'`
  - c) `z([1:2:9])=ones(1,5)`
  - d) `z([3 7 1 5])=zeros(1,4)`
4. Dati i vettori  $x=2:5$  e  $y=-3:2:3$ . Dopo aver eseguito il comando `format rat`, si eseguono le seguenti istruzioni e si spieghi il risultato:
  - b) `x.*y`
  - c) `x./y`
  - d) `x.^y`
5. Data la matrice
$$A = [1 \ 5 \ 8; \ 84 \ 81 \ 7; \ 12 \ 34 \ 71]$$
esaminare il contenuto di:
$$A(1,1), \quad A(2,1), \quad A(1,2), \quad A(3,3),$$
$$A(:,1) \quad A(3,:),$$
$$A(1:2,:) \quad A(:,2:3)$$
6. Eseguire le seguenti istruzioni e spiegare il risultato:
$$A = [1 \ 5 \ 8; \ 2 \ 0 \ 3]$$
$$x = [-1 \ 10 \ 1]$$
$$y = [6; \ 7; \ 9]$$
$$B = [A; x]$$
$$B(:,3) = y$$
7. Data la matrice  $A = [1 \ 2; \ 3 \ 4]$  ed il vettore  $b = [3; \ 7]$  calcolare:
$$A+A, \ A-A, \ A*A, \ A^2, \ A', \ A.*A, \ A.^2, \ A*b, \ b'*A.$$
8. Data la matrice  $5 \times 5$ 
$$A=[1:5; 6:10; 11:15; 16:20; 21:25]$$

- a) generare le matrici  $\mathbf{U}$  triangolare superiore ed  $\mathbf{L}$  triangolare inferiore i cui elementi diversi da zero coincidono con quelli omonimi di  $A$ ; successivamente, porre tutti gli elementi della diagonale principale della matrice  $\mathbf{U}$  uguali a 0 e quelli della matrice  $\mathbf{L}$  uguali ad 1.
- b) generare le matrici  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{BS}$  e  $\mathbf{BI}$  rispettivamente tridiagonale, bidiagonale superiore e bidiagonale inferiore, i cui elementi non nulli coincidono con quelli omonimi di  $A$ .

Suggerimento: Utilizzare i comandi `tril`, `triu` e `diag`

9. Applicare i seguenti due algoritmi per il calcolo di una radice della seguente equazione di secondo grado

$$y^2 + 2py - q = 0$$

con  $p = \underbrace{4.9999999999995}_{11 \text{ volte}} \cdot 10^4$  e  $q = 10^{-2}$ .

Algoritmo 1:

```
delta = p^2+q
r = sqrt(delta)
y1 = -p + r
```

Algoritmo 2:

```
delta = p^2+q
r = sqrt(delta)
z = -p - r
y1 = -q/z
```

La soluzione esatta è  $y_1 = 10^{-7}$ . Spiegare il motivo per cui il primo algoritmo fornisce un risultato inaccurato.

10. Determinare il più efficace algoritmo per calcolare, in aritmetica finita,

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Suggerimento: l'algoritmo deve prevenire per quanto possibile l'overflow.

Si testi la procedura prendendo  $x = 2^{600}$  e  $y = x \sqrt{u/2}$  dove  $u$  denota la precisione di macchina (ovvero `eps/2` in Matlab).

## SOLUZIONI:

- $x=1:10;$   
 $y=10:-1:1; y=y';$   
 $z=linspace(0,1,13); z=z';$
- $x = -5:9;$   
 $\max(x)$  (ans = **9**)    $\min(x)$  (ans = **-5**)    $\max(\text{abs}(x))$  (ans = **9**)  
 $\min(\text{abs}(x))$  (ans = **0**)    $\text{sum}(x)$  (ans = **30**)    $\text{sum}(\text{abs}(x))$  (ans = **60**)
- a)  $\text{length}(z)$  restituisce la lunghezza del vettore  $z$ , cioè **9**.  
b)  $z'$  restituisce il vettore trasposto di  $z$ , cioè il vettore colonna

$$z' = \begin{pmatrix} 50 \\ 45 \\ 40 \\ 35 \\ \vdots \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- c)  $z([1:2:9])=\text{ones}(1,5)$  assegna il valore 1 alle componenti di  $z$  di indice 1, 3, 5, 7, 9;  
d)  $z([3\ 7\ 1\ 5])=\text{zeros}(1,4)$  assegna il valore 0 alle componenti di  $z$  di indice 3, 7, 1, 5;
- a)  $x.*y$  restituisce il vettore **ans** contenente il prodotto componente per componente tra i vettori  $x$  e  $y$  (**ans** = [-6 3 4 15]);  
b)  $x./y$  restituisce il vettore **ans** contenente il rapporto componente per componente tra i vettori  $x$  e  $y$  (**ans** = [-2/3 -3 4 5/3]);  
c)  $x.^y$  restituisce il vettore **ans** contenente le componenti di  $x$  elevate alla potenza specificata dalle corrispondenti componenti di  $y$  (**ans** = [1/8 1/3 4 125]).
- $A(1,1) = 1,$     $A(2,1) = 84,$     $A(1,2) = 5,$     $A(3,3) = 71,$   
 $A(:,1)$  restituisce la prima colonna di  $A$ ,  
 $A(3,:)$  restituisce la terza riga di  $A$ ,  
 $A(1:2,:)$  restituisce la sottomatrice di  $A$  costituita dalle sue prime due righe e da tutte le sue colonne,  
ovvero  $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 84 & 81 & 7 \end{pmatrix},$   
 $A(:,2:3)$  restituisce la sottomatrice di  $A$  costituita da tutte le sue righe e dalla seconda e terza colonna. ovvero  $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 81 & 7 \\ 34 & 71 \end{pmatrix}$
- Le prime tre istruzioni definiscono una matrice  $A$  di dimensione  $2 \times 3$ , un vettore riga  $x$  di lunghezza 3 ed un vettore colonna  $y$  della stessa lunghezza, rispettivamente;  
 $B=[A;x]$  definisce la matrice  $B$  di dimensione  $3 \times 3$  le cui prime due righe coincidono con quelle di  $A$  mentre la terza coincide con il vettore  $x$ ;  
 $B(:,3) = y$  sostituisce i valori della terza colonna di  $B$  con gli omonimi del vettore  $y$ .

$$\begin{aligned}
7. \quad \mathbf{A}+\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} & \mathbf{A}-\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{A}*\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} & \mathbf{A}^{\wedge}2 &= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \\
\mathbf{A}' &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \mathbf{A}.*\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix} & \mathbf{A}.\wedge 2 &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix} \\
\mathbf{A}*\mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 17 \\ 37 \end{pmatrix} & \mathbf{b}'*\mathbf{A} &= ( 24 \quad 34 )
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad \text{a) } \mathbf{U} &= \text{triu}(\mathbf{A}); \quad \mathbf{L} = \text{tril}(\mathbf{A}); \\
\mathbf{U} &= \mathbf{U}-\text{diag}(\text{diag}(\mathbf{U})); \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}-\text{diag}(\text{diag}(\mathbf{L}))+\text{eye}(5);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \mathbf{T} &= \text{triu}(\text{tril}(\mathbf{A},1),-1); \\
\mathbf{BS} &= \text{triu}(\mathbf{T}); \quad \mathbf{BI} = \text{tril}(\mathbf{T});
\end{aligned}$$

9. Il primo algoritmo fornisce un risultato inaccurato poichè  $p^2 \gg q$  e quindi  $r = \sqrt{p^2 + q} \approx p$ . Questo implica che la somma algebrica  $-p + r$ , richiesta dalla terza istruzione del primo algoritmo, è mal condizionata ed, in particolare, si verifica il fenomeno della cancellazione numerica.

Le operazioni coinvolte nel secondo algoritmo, invece, sono tutte ben condizionate e quindi il risultato finale è accurato compatibilmente con la precisione di macchina dello standard IEEE per la doppia precisione.

10. Se  $x$  oppure  $y$  sono molto grandi, in valore assoluto, allora il calcolo di  $x^2$  o  $y^2$  può provocare overflow. Al fine di prevenire per quanto possibile tale problema, quando  $|x| \geq |y|$ , conviene calcolare  $\sqrt{x^2 + y^2}$  usando la seguente espressione equivalente

$$|x|\sqrt{1 + (y/x)^2}.$$

In questo modo, infatti,  $|y/x| < 1$  e quindi il calcolo di  $(y/x)^2$  non provoca sicuramente overflow.

In modo analogo, l'espressione che conviene usare quando  $|y| \geq |x|$  è

$$|y|\sqrt{1 + (x/y)^2}.$$