ESERCITAZIONE MATLAB 5: Fattorizzazione LU di una matrice quadrata

1. Si scriva una function Matlab che calcoli, se esistono, le matrici L ed U della fattorizzazione
$$A = LU$$
dove A è una matrice quadrata assegnata in input, L è una matrice triangolare inferiore con elementi diagonali tutti uguali ad 1 e U è una matrice triangolare superiore.

```
%
% fattLU.m
%
% Calcolo della fattorizzazione  A = LU.
%
% Dati di INPUT:
% A        matrice da fattorizzare
%
%
% Dati di OUTPUT:
% L,U      matrici triangolari della fattorizzazione.
%
```

Il seguente è un breve riassunto del metodo di eliminazione di Gauss per il calcolo di tale fattorizzazione. Al primo passo si pone:

$$A^{(1)} = A \equiv \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Per ogni $i = 1, 2, \dots, n-1,$, sia $A^{(i)} = \left(a_{ij}^{(i)}\right)_{i,j=1,\dots,n}$ la matrice fino a quel momento calcolata. Se risulta $a_{ii}^{(i)} \neq 0$ allora si definisce il seguente vettore elementare di Gauss

$$\mathbf{g}_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i)}} \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{i} \; a_{i+1,i}^{(i)} \; a_{i+2,i}^{(i)} \; \dots \; a_{ni}^{(i)} \right)^T \equiv \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{i} \; g_{i+1,i} \; g_{i+2,i} \; \dots \; g_{ni} \right)^T \tag{1}$$

e la seguente matrice elementare di Gauss

$$L_i = I_n - \mathbf{g}_i \mathbf{e}_i^T \tag{2}$$

dove $\mathbf{e}_i$ è l'i-mo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

La matrice $A^{(i+1)}$ è quindi data da

$$\begin{aligned} A^{(i+1)} &= L_i\, A^{(i)} = \left(I_n - \mathbf{g}_i \mathbf{e}_i^T\right)\, A^{(i)} = A^{(i)} - \mathbf{g}_i \left(\mathbf{e}_i^T\, A^{(i)}\right) \\ &= A^{(i)} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{i+1,i} \\ g_{i+2,i} \\ \vdots \\ g_{ni} \end{pmatrix} \left(0 \,\ldots\, 0, a_{ii}^{(i)}\; a_{i,i+1}^{(i)} \,\ldots\, a_{in}^{(i)}\right). \end{aligned}$$

Da tale espressione si deduce che gli <u>unici</u> elementi della matrice $A^{(i+1)}$ che differiscono dai corrispondenti elementi della matrice $A^{(i)}$ sono quelli che appartengono alla sottomatrice costituita dalle ultime $n-i$ righe e dalle ultime $n-i+1$ colonne. In particolare, per costruzione, si ha

$$\begin{pmatrix} a_{i+1,i}^{(i+1)} \\ \vdots \\ a_{n,i}^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

mentre

$$\begin{pmatrix} a_{i+1,i+1}^{(i+1)} & \ldots & a_{i+1,n}^{(i+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,i+1}^{(i+1)} & \ldots & a_{nn}^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i+1,i+1}^{(i)} & \ldots & a_{i+1,n}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,i+1}^{(i)} & \ldots & a_{nn}^{(i)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_{i+1,i} \\ \vdots \\ g_{ni} \end{pmatrix} \left(a_{i,i+1}^{(i)} \,\ldots\, a_{in}^{(i)}\right). \tag{4}$$

Se la procedura può essere proseguita fino alla iterazione $n-1$ allora $A^{(n)}$ è triangolare superiore e coincide con il fattore U della fattorizzazione $A = LU$. Il fattore L è invece dato da, si vedano (1) e (2),

$$L = \left(L_{n-1} \cdots L_1\right)^{-1} = L_1^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ g_{21} & 1 & & & \\ g_{31} & g_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Nella implementazione effettiva del metodo si utilizza una unica matrice `A` che all'inizio della i-ma iterazione contiene $A^{(i)}$ e viene quindi sovrascritta con $A^{(i+1)}$. Se la procedura è stata portata a termine con successo allora alla fine `A` contiene il fattore U. Per quanto riguarda la matrice L, essa viene inizializzata come $L = I_n$ ed alla iterazione i-ma si memorizzano nelle sue opportune posizioni gli elementi significativi, ovvero diversi da zero, del vettore $\mathbf{g}_i$. I seguenti sono i principali passi dell'algoritmo da implementare:

(a) $L = I_n$;

(b) per $i = 1, 2, \ldots, n-1$

   i. se $\mathtt{a}_{ii} = 0$ allora `stop`,
   ii. calcolo dell'i-mo vettore elementare di Gauss e memorizzazione delle sue componenti significative nelle opportune posizioni di L,
   iii. aggiornamento degli elementi di A appartenenti alle sue ultime $n-i$ righe e $n-i+1$ colonne utilizzando le equazioni (3)-(4);

   (c) $U = A$

2. Al fine di verificare che il metodo è stato implementato correttamente lo si applichi per calcolare la fattorizzazione LU della seguente matrice

$$A = FG, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 & 11 \\ 0 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 15 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}.$$

I fattori L ed U calcolati dalla procedura devono verificare $L = F$ e $U = G$ dato il teorema di unicità della fattorizzazione LU di una matrice non singolare.

SOLUZIONE:

1. function [L,U] = fattLU(A)

```
% fattLU.m
%
% [L,U] = fattLU(A)
%
% Calcola la fattorizzazione
%
% A = LU
%
% con L triangolare inferiore a diagonale unitaria e U
% triangolare superiore
%
% Input:
%       A matrice da fattorizzare
%
% Output: L,U matrici triangolari della fattorizzazione.
%

  [m,n]=size(A);

  if m~= n,
     error('La matrice dei coefficienti non e'' quadrata')
  end

  L = eye(n);

  for i = 1:n-1

    if A(i,i)==0,
       error('La matrice non e'' fattorizzabile LU')
    end

    g = [zeros(i,1); A(i+1:n,i)/A(i,i)];

    L(i+1:n,i) = g(i+1:n);

    A(i+1:n,i) = 0;

    A(i+1:n,i+1:n) = A(i+1:n,i+1:n)-g(i+1:n)*A(i,i+1:n);

  end

  U = A;
```

2.
```
>> F = [1 0 0 0;2 1 0 0;3 4 1 0; 5 6 7 1]
F =
     1     0     0     0
     2     1     0     0
     3     4     1     0
     5     6     7     1
>> G = [8 9 10 11;0 12 13 14; 0 0 15 16; 0 0 0 17]
G =
     8     9    10    11
     0    12    13    14
     0     0    15    16
     0     0     0    17
>> A=F*G;
>> [L,U]=fattLU(A)
L =
     1     0     0     0
     2     1     0     0
     3     4     1     0
     5     6     7     1
U =
     8     9    10    11
     0    12    13    14
     0     0    15    16
     0     0     0    17
```

Si osserva che i fattori `L` ed `U` calcolati dalla function fattLU.m coincidono con le matrici `F` e `G`, rispettivamente. Questo fatto è in perfetto accordo con il Teorema di Unicità della fattorizzazione LU di una matrice non singolare.