

Il sistema (2) ammette soluzione se e solo se

$$\mathbf{b} \in \text{ran}(A) \equiv \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \text{ tali che esiste } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \text{ per cui } A\mathbf{z} = \mathbf{y}\}.$$

È noto che $\text{ran}(A)$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^m da cui si ricava

$$\text{rank}(A) \equiv \dim(\text{ran}(A)) \leq m.$$

Si dimostra che in realtà

$$\text{rank}(A) \leq \min(m, n).$$

Nel caso in cui la soluzione di (2) esista allora essa è unica se e solo se

$$\text{Null}(A) \equiv \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \text{ tali che } A\mathbf{z} = \mathbf{0}_m\} = \{\mathbf{0}_n\}$$

dove $\mathbf{0}_m$ e $\mathbf{0}_n$ sono i vettori con tutte componenti uguali a zero in \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , rispettivamente. Non è difficile verificare che $\text{Null}(A)$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n e pertanto $\dim(\text{Null}(A)) \leq n$. Vale inoltre il seguente risultato.

Teorema 1.1 Per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si ha $\text{rank}(A) + \dim(\text{Null}(A)) = n$.

Definizione 1.2 Una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è detta non singolare se $\text{rank}(A) = n$.

È importante sottolineare che la definizione di non singolarità vale soltanto per matrici quadrate.

Dalle precedenti considerazioni discende che se la matrice dei coefficienti A del sistema lineare (2) è quadrata (ovvero se il numero di equazioni del sistema coincide con il numero di incognite) allora per ogni vettore dei termini noti \mathbf{b} , la soluzione di (2) esiste ed è unica se e soltanto se A è non singolare.

2 Operazioni su matrici

Definizione 2.1 La trasposta di una matrice $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è la matrice $F^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ che si ottiene da F scambiando le sue righe e le sue colonne, ovvero

$$F^T = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & \dots & f_{m1} \\ f_{12} & f_{22} & \dots & f_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & f_{2n} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Definizione 2.2 Il prodotto αF di uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ ed una matrice $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è la matrice $\alpha F = (\alpha f_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Definizione 2.3 La somma di due matrici $F = (f_{ij}), G = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è la matrice $F + G = (f_{ij} + g_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Definizione 2.4 Il prodotto (righe per colonne) tra una matrice $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ed una matrice $G = (g_{jk}) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ è la matrice $H = F \cdot G = (h_{ik}) \in \mathbb{R}^{m \times r}$ i cui elementi sono dati da

$$h_{ik} = \sum_{j=1}^n f_{ij}g_{jk}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

Il prodotto righe per colonne tra due matrici può anche essere interpretato nei seguenti due modi:

- siano $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $G = (g_{jk}) \in \mathbb{R}^{n \times r}$. Per ogni $k = 1, 2, \dots, r$, sia $\mathbf{g}_k = (g_{1k} \ g_{2k} \ \dots \ g_{nk})^T$ la k -ma colonna di G . Allora, la k -ma colonna della matrice $F \cdot G$ è data da $F \mathbf{g}_k$, ovvero

$$F \cdot G = F \cdot (\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \dots \ \mathbf{g}_r) = (F \mathbf{g}_1 \ F \mathbf{g}_2 \ \dots \ F \mathbf{g}_r)$$

- analogamente, indicando con $\mathbf{f}_i^T = (f_{i1} \ f_{i2} \ \dots \ f_{in})$ la i -ma riga di F , per ogni $i = 1, 2, \dots, m$, risulta

$$F \cdot G = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^T \\ \mathbf{f}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{f}_m^T \end{pmatrix} \cdot G = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^T G \\ \mathbf{f}_2^T G \\ \vdots \\ \mathbf{f}_m^T G \end{pmatrix}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

1. se $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times k}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ allora $(\alpha F) \cdot G = F \cdot (\alpha G)$;

2. se $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times k}$ e $H \in \mathbb{R}^{k \times l}$ allora

$$(F \cdot G) \cdot H = F \cdot (G \cdot H) \quad (\text{proprietà associativa});$$

3. se $F, G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $H \in \mathbb{R}^{n \times k}$ allora

$$(F + G) \cdot H = F \cdot H + G \cdot H \quad (\text{proprietà distributiva destra});$$

4. se $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $G, H \in \mathbb{R}^{n \times k}$ allora

$$F \cdot (G + H) = F \cdot G + F \cdot H \quad (\text{proprietà distributiva sinistra});$$

5. se $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $G \in \mathbb{R}^{n \times k}$ allora

$$(F \cdot G)^T = G^T \cdot F^T.$$

È importante sottolineare che il prodotto righe per colonne non soddisfa la proprietà commutativa ovvero, in generale.

$$F \cdot G \neq G \cdot F.$$

Ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il seguente è un importante risultato.

Teorema 2.5 Se $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$ è non singolare allora esiste ed è unica la matrice inversa di F , indicata con F^{-1} , tale che

$$F \cdot F^{-1} = F^{-1} \cdot F = I \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

La matrice I nella precedente equazione è detta matrice identità di ordine m .

Si dimostra che se $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$ è non singolare e $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ allora

$$\text{rank}(F \cdot G) = \text{rank}(G).$$

In particolare, se $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e G è non singolare, dal precedente risultato si ricava che $F \cdot G$ è a sua volta non singolare. Inoltre, non è difficile verificare che

$$(F \cdot G)^{-1} = G^{-1} \cdot F^{-1}.$$

3 Matrici quadrate con particolari strutture

Una matrice quadrata $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ è detta

1. simmetrica se $F^T = F$;
2. diagonale se $f_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$, ovvero

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & & & \\ & f_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_{mm} \end{pmatrix};$$

3. triangolare inferiore se $f_{ij} = 0$ per ogni $i < j$ ovvero

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & & & \\ f_{21} & f_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mm} \end{pmatrix};$$

4. triangolare superiore se $f_{ij} = 0$ per ogni $i > j$ ovvero

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1m} \\ & f_{22} & \dots & f_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & f_{mm} \end{pmatrix};$$

5. ortogonale se $F^{-1} = F^T$. Chiaramente affinché una matrice sia ortogonale occorre che sia non singolare;

6. definita positiva se per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, si ha

$$\mathbf{v}^T F \mathbf{v} > 0;$$

7. simmetrica definita positiva (sdp) se è sia simmetrica che definita positiva.

Non è difficile verificare che il prodotto righe per colonne tra matrici diagonali, triangolari inferiori o superiori è a sua volta diagonale, triangolare inferiore o superiore, rispettivamente.

Un risultato analogo vale per le matrici inverse, ovvero l'inversa di una matrice diagonale, triangolare inferiore o superiore è a sua volta diagonale, triangolare inferiore o superiore, rispettivamente.

4 Determinante

Il determinante di una matrice quadrata $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ può essere definito per ricorrenza nel seguente modo

$$\det(F) = \begin{cases} f_{11} & \text{se } n = 1 \\ \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} f_{i1} \det(F_{i1}) & \text{se } n > 1 \end{cases} \quad (4)$$

dove, in generale, F_{ij} è la matrice di dimensione $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene da F eliminando la i -ma riga e la j -ma colonna.

Si dimostra che, per ogni $i, j = 1, 2, \dots, n$,

$$\det(F) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} f_{kj} \det(F_{kj}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} f_{ik} \det(F_{ik}).$$

Valgono le seguenti proprietà:

1. $\det(F \cdot G) = \det(F) \det(G)$;
2. $\det(F^T) = \det(F)$;
3. $\det(\alpha F) = \alpha^n \det(F)$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. se F è una matrice triangolare inferiore o superiore allora $\det(F)$ è uguale al prodotto dei suoi elementi diagonali ossia

$$\det(F) = \prod_{i=1}^n f_{ii};$$

5. F è non singolare se e soltanto se $\det(F) \neq 0$.

È opportuno sottolineare che il determinante è definito soltanto per matrici quadrate.

5 Matrici a blocchi

Una matrice a blocchi, o partizionata a blocchi, è una matrice i cui elementi sono a loro volta matrici. In notazione matematica, una matrice a blocchi di dimensione $m \times n$ a blocchi è data da

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{m1} & F_{m2} & \cdots & F_{mn} \end{pmatrix}$$

dove F_{ij} , detto blocco, è una matrice per ogni $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$. Chiaramente le dimensioni dei blocchi devono essere compatibili. Ad esempio, le sottomatrici F_{1j} , con $j = 1, 2, \dots, n$, devono avere tutte quante lo stesso numero di righe, così come le sottomatrici F_{i1} , con $i = 1, 2, \dots, m$, devono avere tutte quante lo stesso numero di colonne. Un esempio di matrice 2×2 a blocchi è il seguente:

$$F = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix},$$

dove

$$\begin{aligned} F_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, & F_{12} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \\ F_{21} &= \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}, & F_{22} &= \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si osserva che il prodotto righe per colonne tra due matrici partizionate a blocchi può essere calcolato trattando i blocchi come se fossero dei numeri a patto che le dimensioni siano compatibili. Ad esempio

$$\begin{aligned} F \cdot G &= \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{11}G_{11} + F_{12}G_{21} & F_{11}G_{12} + F_{12}G_{22} \\ F_{21}G_{11} + F_{22}G_{21} & F_{21}G_{12} + F_{22}G_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qualora il numero di colonne di F_{11} e di F_{22} coincida con il numero di righe di G_{11} e di G_{22} , rispettivamente. La compatibilità delle dimensioni delle rimanenti matrici discende dalla ben definizione dei fattori F e G .

Le matrici a blocchi che sono utilizzate più di frequente sono quelle per cui i blocchi diagonali sono quadrati. In particolare, matrici del seguente tipo

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & & & \\ F_{21} & F_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ F_{m1} & F_{m2} & \cdots & F_{mm} \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} \\ & F_{22} & \cdots & F_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & F_{mm} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

con blocchi diagonali quadrati, sono dette triangolari inferiori o superiori a blocchi, rispettivamente. Analogamente una matrice diagonale a blocchi è data da

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & & & \\ & F_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_{mm} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

con F_{ii} matrice quadrata per ogni $i = 1, 2, \dots, m$.

Si può verificare che il determinante di una matrice triangolare inferiore o superiore a blocchi o di una matrice diagonale a blocchi è dato dal prodotto dei determinanti dei blocchi diagonali, ovvero per le matrici in (5)-(6) si ha

$$\det(F) = \prod_{i=1}^m \det(F_{ii}).$$

6 Autovalori

Sia $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice quadrata. Un numero complesso $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di F , se esiste un vettore $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, detto autovettore, tale che

$$F\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

La precedente uguaglianza può essere riscritta nel seguente modo

$$(F - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (7)$$

dove I è la matrice identità di ordine n . Da tale riscrittura si evince che λ è autovalore se e soltanto se la matrice $F - \lambda I$ è singolare poichè il sistema lineare (7) avente tale matrice come matrice dei coefficienti ed il vettore nullo $\mathbf{0}$ come vettore dei termini noti deve ammettere più di una soluzione. Infatti, indipendentemente dal valore di λ , il sistema (7) ammette certamente come soluzione il vettore nullo. Nel caso in cui λ sia autovalore allora, oltre al vettore nullo, il sistema deve ammettere un'altra soluzione. Detto

$$p(\lambda) \equiv \det(F - \lambda I)$$

il polinomio caratteristico di F , si ha che gli autovalori di F sono le radici di $p(\lambda)$, ovvero

$$\lambda \text{ è autovalore di } F \quad \Leftrightarrow \quad p(\lambda) = 0.$$

È opportuno osservare che se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ è un autovettore corrispondente ad un autovalore λ allora anche $\alpha\mathbf{x}$ è un autovettore corrispondente allo stesso autovalore per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Inoltre, per una matrice F di ordine n si ha che $p(\lambda)$ è un polinomio di grado esatto n e, pertanto, F ha esattamente n autovalori (eventualmente non tutti distinti).

Lo spettro di una matrice F è l'insieme dei suoi autovalori, ovvero

$$\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ è autovalore di } F\}.$$

Il raggio spettrale di F è il massimo modulo dei suoi autovalori, ossia

$$\rho(F) = \max_{\lambda \in \sigma(F)} |\lambda|.$$

È evidente che $\rho(F) \geq 0$.

Valgono le seguenti proprietà:

- Se $F^T = F$ allora $\sigma(F) \subset \mathbb{R}$;
- se F è sdp allora tutti i suoi autovalori sono reali e strettamente positivi;
- $\det(F) = \prod_{\lambda \in \sigma(F)} \lambda$;
- F è singolare se e soltanto se $0 \in \sigma(F)$;
- gli autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono tra di loro linearmente indipendenti.
- se $\lambda \in \sigma(F)$ allora, per ogni intero $k \geq 0$, $\lambda^k \in \sigma(F^k)$. Inoltre, gli autovettori di F sono anche autovettori di F^k .

Due matrici F e G si dicono simili se esiste S non singolare tale che

$$G = S^{-1}FS.$$

Si dimostra che se F e G sono simili allora $\sigma(F) = \sigma(G)$.

Una matrice F si dice diagonalizzabile se esiste V non singolare tale che

$$V^{-1}FV = D \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (8)$$

La precedente uguaglianza si può riscrivere come segue

$$FV = DV.$$

Da questa espressione si deduce che gli elementi diagonali di D sono gli autovalori di F , e la k -ma colonna di V è un autovettore di F corrispondente a λ_k . È noto che se $F = F^T$ allora F è sicuramente diagonalizzabile mediante trasformazione di similitudine ortogonale, ovvero la matrice V per cui vale (8) è ortogonale.

Una matrice F si dice convergente se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} F^k = O,$$

dove O è la matrice che ha tutti elementi uguali a zero. Si dimostra che F è convergente se e soltanto se $\rho(F) < 1$.