1. Esercizi

Esercizio 1. Sia A la $\mathbb{C}$ algebra commutativa $\mathbb{C}[t]$. Si dimostri che per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ il quoziente $U_\alpha = \mathbb{C}[t]/(t-\alpha)$ è un modulo semplice. Si dimostri che il modulo

$$\prod_{\alpha \in \mathbb{C}} U_\alpha$$

non è semisemplice

Esercizio 2. Sia D un corpo e sia M un D modulo sinistro. Si dimostri che $D \otimes_D M \simeq M$ dove il primo fattore del prodotto tensore è considerato come modulo destro su D.

Esercizio 3. Sia D un corpo e siano M e sia $e_{m,n}$ la base naturale di $D^{\oplus M \times N}$. Sia S il D sottomodulo di $D^{\oplus M \times N}$ generato dagli elementi della forma

$$e_{m_1+m_2,n} - e_{m_1,n} - e_{m_2,n}, \qquad e_{m,n_1+n_2} - e_{m,n_1} - e_{m,n_2}, \qquad e_{\lambda m,n} - \lambda e_{m,n}, \qquad e_{m,\lambda n} - \lambda e_{m,n}.$$

e si definisca $T_{M,N} = \frac{D^{\oplus M \times N}}{S}$ similmente a quanto fatto nel caso dei corpi. Si faccia un esempio in cui $T_{D,D}$ non è isomorfo a D.

Esercizio 4. Siano U, V, W spazi vettoriali.

a) Dimostrare che $U \otimes (V \otimes W)$ e $(U \otimes V) \otimes W$ soddisfano la proprietà universale del prodotto tensore triplo $U \otimes V \otimes W$.
b) Dimostrare l'unicità (a meno di isomorfismo unico) del prodotto tensore triplo $U \otimes V \otimes W$.
c) Dedurre la proprietà associativa del prodotto tensoriale.

Esercizio 5. Siano U, V, U', V' spazi vettoriali e $A : U \longrightarrow U'$, $B : V \longrightarrow V'$ due applicazioni lineari.

a) Dimostrare, usando la proprietà universale, che esiste una unica applicazione lineare, che indicheremo con $A \otimes B$, tra $U \otimes V$ e $U' \otimes V'$ tale che $(A \otimes B)(u \otimes v) = A(u) \otimes B(v)$.
b) Supponiamo adesso che $U' = U$, $V' = V$ e che A e B siano diagolizzabili con autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ e $\mu_1, \ldots, \mu_n$ rispettivamente. Dimostrare che $A \otimes B$ è diagonalizzabile e calcolarne gli autovalori.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Si consideri l'applicazione lineare $T : V \otimes V^* \longrightarrow \Bbbk$ definita da $T(v \otimes f) = f(v)$. Descrivere l'applicazione da $\mathrm{End}(V)$ in $\Bbbk$ corrispondente a T tramite l'isomorfismo canonico $V \otimes V^* \simeq \mathrm{End}(V)$.

Esercizio 7. a) Sia $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ un'estensione di campi. Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{F}$. Dimostrare che se $\mathbb{K}$ è una estensione finita di campi allora c'è un isomorfismo canonico di spazi vettoriali $Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{F}} V, \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{F}} W) \simeq \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{F}} Hom_{\mathbb{F}}(V, W)$.
b) Dimostrare che, se $W = V$, l'isomorfismo nel punto (a) è un isomorfismo di algebre.

Esercizio 8. Sia K un corpo che estende il campo $\mathbb{C}$ in modo tale che $\mathbb{C}$ è nel centro di K (ovvero: K è una $\mathbb{C}$-algebra).

a) Dimostrare che se K ha dimensione finita come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, allora $K = \mathbb{C}$.
b) Dimostrare che se K ha dimensione numerabile come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, allora $K = \mathbb{C}$.

Esercizio 9. Siano A e B due $\Bbbk$-algebre. Si verifichi che $A \otimes_{\Bbbk} B$ ha una struttura di $\Bbbk$-algebra in cui l'unità è $1 \otimes 1$ e il prodotto è definito da $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$.

Esercizio 10. Sia $\Bbbk \subset E$ una estensione di campi. Se A è una $\Bbbk$-algebra allora $A_E = E \otimes_{\Bbbk} A$ con il prodotto definito nell'esercizio precedente è una E-algebra. Inoltre se U è un A-modulo allora $U_E = E \otimes_{\Bbbk} U$ ha un struttura naturale di A_E algebra definita da $(\mu \otimes a) \cdot (\lambda \otimes v) = \mu\lambda \otimes av$. Si dia un esempio di un'algebra A e di un A-modulo semplice U tale che U_E non sia un A_E-modulo semplice.

2. Esercizi sulle algebre associative semisemplici

Un elemento e di un'algebra A si dice idempotente se $e^2 = e$. Si dice idempotente primitivo se per ogni x, y idempotenti tali che $xy = yx = 0$ e $x + y = e$ si ha $x = 0$ o $y = 0$.

Esercizio 11. Descrivere tutti i moduli irriducibili dei seguenti anelli
$$A = \mathbb{C}[x, y] \quad B = \frac{\mathbb{C}[x, y]}{(x^2 + y^2 - 1)}.$$

Esercizio 12. Descrivere gli ideali sinistri, destri e bilateri e i moduli irriducibili dell'anello $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$.

Esercizio 13. Sia dia un esempio di una $\mathbb{R}$ algebra $A \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che V è irriducibile ma $A \neq \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Esercizio 14. Quali sono le matrici diagonali che sono idempotenti primitivi di $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$?

Esercizio 15. Sia A un'algebra semisemplice e V una sua rappresentazione. Si dimostri che V è irriducibile se e solo se ogni A-endomorfismo di V non nullo è invertibile.

Esercizio 16. Sia A un'algebra semisemplice. Si dimostri per un idempotente x le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) x è primitivo;
(2) Ax è un A modulo semplice;
(3) xAx è un corpo.

Esercizio 17. Sia A un'algebra semisemplice. Siano x e y due idempotenti primitivi allora Ax e Ay sono isomorfi se e solo se $xAy \neq 0$.

3. Esercizi III settimana

Esercizio 18. Calcolare la tabella dei caratteri di Q_8.

Esercizio 19. Calcolare la tabella dei caratteri di D_5 e S_4.

Esercizio 20. $G \times G$ agisce su $\mathbb{C}[G]$ per moltiplicazione destra e sinistra: $(g, h) \cdot x = gxh^{-1}$. Calcolare il carattere di $\mathbb{C}[G]$ come $G \times G$ modulo

Esercizio 21. Sia V ua rappresentazione complessa del gruppo finito G tale che $\chi_V(g) = 0$ se $g \neq 1$. Dimostrare che $V \simeq \mathbb{C}[G]^{\oplus n}$ per qualche n intero non negativo.

Esercizio 22. Sia V una rappresentazione di G. Mostrare che il carattere di $\mathsf{S}^2(V)$ è uguale
$$\chi_{S^2V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)).$$
Trovare l'analoga formula per il carattere di $\Lambda^2 V$.

4. Esercizi IV settimana

Esercizio 23.

a) Se G agisce su un insieme finito X, sia $\Bbbk[X]$ la rappresentazione di permutazioni complessa associata e sia χ_X il suo carattere. Dimostrare che $\langle 1, \chi_X \rangle$ è uguale al numero di orbite dell'azione di G su X (1 è la funzione che vale sempre uno).

b) Il gruppo G agisce sul prodotto cartesiano $X \times X$ tramite $g(x, y) = (gx, gy)$. Dimostrare che $\Bbbk[X \times X] \simeq \Bbbk[X] \otimes \Bbbk[X]$.

Esercizio 24. Sia G un gruppo finito che agisce su un insieme finito X con almeno due elementi. Diciamo che l'azione di G su X è *doppiamente transitiva* se dati comunque $x, y, x', y' \in X$ con $x \neq y$ e $x' \neq y'$, esiste $g \in G$ tale che $x' = gx$ e $y' = gy$. Dimostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti:

a) l'azione di G su X è doppiamente transitiva;
b) l'azione di G su $X \times X$ ha esattamente due orbite: la diagonale ed il complementare;
c) se χ_X è il carattere della rappresentazione di permutazioni di X, allora $\langle 1, \chi_X^2 \rangle = 2$;
d) V_X decompone come $\Bbbk[X] =\simeq \mathbb{C} \oplus \theta$, con θ sottorappresentazione irriducibile.

Esercizio 25. Si mostri che $\operatorname{Ind}_H^G V^* \simeq (\operatorname{Ind}_H^G V)^*$.

Esercizio 26. Sia H un sottogruppo di G. Sia V una rappresentazione di G e U una rappresentazione di H. Si mostri che

$$\operatorname{Ind}_H^G(V \otimes U) \simeq V \otimes \operatorname{Ind}_H^G U.$$

Esercizio 27. Sia H un sottogruppo del gruppo finito G. Sia A il sottospazio vettoriale $\Bbbk[G]$ delle funzioni invarianti a sinistra e a destra per H. Dimostrare che se $a, b \in A$ allora $a * b \in A$. Si noti che se $H \neq \{e_G\}$ allora A non contiene l'unità di $\Bbbk[G]$, si mostri che tuttavia A ha un'unità: quale?

5. Esercizi V settimana

Esercizio 28. Si descrivano tutte le rappresentazioni del gruppo delle isometrie di un n-agono regolare D_n per n dispari.

Esercizio 29. Si descrivano tutte le rappresentazioni del gruppo di Heisenberg finito:

$$H_q = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,:\, x, y, z \in \mathbb{F}_q \right\}.$$

Esercizio 30. Si determinino le dimensioni delle rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico S_5.

Esercizio 31. Sia H un sottogruppo normale di G e V una rappresentazione irriducibile di H. Si dimostri argomentando come nella dimostrazione del teorema di Mackey che

$$\dim \operatorname{End}_G(\operatorname{Ind}_H^G(V)) = \frac{\sharp\{g \in G \,:\, V^g \simeq V \text{ as a representation of } H\}}{\sharp H}$$

Esercizio 32. Si dimostri che le rappresentazioni $L_{V,U}$ costruite a lezione di un prodotto semidiretto $A \rtimes H$ sono irriducibili e non isomorfe.

6. Esercizi VI settimana

Esercizio 33. esercizio Siano λ e μ due partizioni di n diciamo che $\lambda \geqslant_d \mu$ se e solo se per ogni i

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geqslant \mu_1 + \cdots + \mu_i.$$

Questa relazione definisce una relazione di ordine parziale tra le partizioni di n. Si dimostri che $\lambda \geqslant_d \mu$ se e solo se $\mu^t \geqslant_d \lambda^t$.

Esercizio 34.

i) Si calcoli il carattere della rappresentazione naturale $\mathbb{C}^n$ di S_n.
ii) Si calcoli il carattere dei prodotti esterni della rappresentazione naturale di $\mathbb{C}^n$: $\Lambda^2\mathbb{C}^n$ e $\Lambda^3\mathbb{C}^n$ di S_n.

[Si intende questo: data una permutazione σ che è il prodotto di h_1 1-cicli, h_2 2-cicli, etc si esprima il carattere delle rappresentazioni in questione sull'elemento σ come funzione degli h_i].

Esercizio 35. Sia $A = \mathbb{C}[S_n]$, λ una partizione di n e T una tabella di forma λ. Definiamo $Q_\lambda = Aa_T$. Descrivere Q_λ come rappresentazione indotta, mostrare che due tabelle della stessa forma forniscono rappresentazioni isomorfe e calcolare la dimensione di

$$\mathrm{Hom}_{S_n}(P_\lambda, Q_\lambda)$$

Ricordiamo che $P_\lambda = As_T$.

Esercizio 36. Sia λ una partizione di n e χ il carattere di S_n della rappresentazione P_λ. Si dimostri che se σ è una permutazione che ha decomposizione in cicli di lunghezza $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ allora $\chi(\sigma)$ è il coefficiente di x^λ nel polinomio:

$$\prod_{i=1}^{r}(x_1^{\mu_i} + \cdots + x_n^{\mu_i}).$$

7. Esercizi VII settimana

Esercizio 37. Usando il fatto che gli elementi ε_T con T standard sono una base di M_λ, si determino le dimensioni di tutte le rappresentazioni di S_n per n minore o uguale a 6. E si determino inoltre tutte le rappresentazioni irriducibili di S_n di dimensione minore o uguale a n.

Esercizio 38. Sia λ la partizione $n-1, 1$. Descrivere P_λ e M_λ e descrivere l'azione di σ sulla base ε_T di M_λ.

Esercizio 39. Sia ε la rappresentazione segno. Si mostri che

$$\varepsilon \otimes M_\lambda \simeq M_{\lambda^t}.$$

Esercizio 40. Dimostrare le seguenti varianti teorema dimostrato a lezione. Sia $c_T = s_T a_T$ e $\tilde{M}_T = Ac_T$.

(1) $\tilde{M}_T$ è irriducibile;
(2) $c_T M_{T'} = 0$ se T e T' non hanno la stessa forma;
(3) $\tilde{M}_T \simeq M_T$.

Esercizio 41. Si consideri la decomposizione di P_λ in irriducibili: $P_\lambda = \sum_\mu M_\mu^{\bigoplus c_{\lambda\mu}}$. Si mostri che se $c_{\lambda\mu} \neq 0$ allora $\lambda \leqslant \mu$.

8. Esercizi VIII settimana

Esercizio 42. Sia T la tabella

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 2 \\ \hline 5 & 6 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Scrivere ε_T come combinazione lineare degli elementi $\varepsilon_{T'}$ con T' standard.

Esercizio 43. Sia $h \leqslant n$ e si consideri S_h come il sottogruppo di S_n che permuta gli elementi $\{1, \ldots, h\}$. Sia μ una partizione di h e sia M_μ la rappresentazione irriducibile di S_h associata.

$$\mathrm{Ind}_{S_h}^{S_n} M_\mu \simeq \bigoplus_{\lambda \supset \mu \text{ e } \lambda \vdash n} M_\lambda^{a_{\lambda\mu}}$$

con $a_{\lambda\mu} = card\{T \text{ tabelle standard di forma } \lambda \smallsetminus \mu\}$.

Esercizio 44 (Regola di Pieri)**.** Sia $n = h + k$ e si consideri S_h come il sottogruppo di S_n che permuta gli elementi $\{1, \ldots, h\}$ e S_k come il sottogruppo di S_n che permuta gli elementi $\{k+1, \ldots, n\}$. Sia μ una partizione di h e sia M_μ la rappresentazione irriducibile di S_h associata. Si consideri M_μ come una rappresentazione del gruppo $S_h \times S_k$ sulla quale S_k agisce banalmente. Si dimostri che

$$\mathrm{Ind}_{S_h \times S_k}^{S_n} M_\mu \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda \supset \mu \text{ e } \lambda \vdash n \\ \text{e } \lambda \smallsetminus \mu \text{ orizzontale}}} M_\lambda,$$

dove un quasi-diagramma $\lambda \smallsetminus \mu$ è detto orizzontale se in ogni colonna compare al più un elemento.

Esercizio 45. SiaV_1 un sottospazio di V e W_1 un sottospazio di W. Si mostri che

$$\frac{V}{V_1} \otimes \frac{W}{W_1} \simeq \frac{V \otimes W}{V \otimes W_1 + V_1 \otimes W}.$$

Esercizio 46. Sia T una tabella o una quasi tabella. Definiamo $E_{\leqslant h} C_{\leqslant k}(T)$ come il numero delle entrate $\leqslant h$ nelle prime k colonne di T (dove la prima colonna è quella più a sinistra). Si dimostrino i seguenti fatti:

(1) $E_{\leqslant h} C_{\leqslant k}(\sigma T) = E_{\leqslant h} C_{\leqslant k}(T)$ per ogni $\sigma \in C_T$ e per ogni h e per ogni k;
(2) sia T una tabella le cui entrate sono crescenti lungo le colonne. Siano j e i con $j > i$ due entrate di T adiacenti nella stessa riga e con j a sinistra di i. Sia I il cammino terra tetto che raddrizza j e i ovvero il cammino terra tetto che ha come elemento più in alto della sua prima colonna j e come elemento più in basso della sua seconda colonna i. Sia $\sigma \in Rad'_I(T)$. Allora $E_{\leqslant h} C_{\leqslant k}(\sigma T) \geqslant E_{\leqslant h} C_{\leqslant k}(T)$ per ogni h e per ogni k.

9. Esercizi IX settimana

Esercizio 47. Sia λ una partizione di $n+1$ e sia μ l'unica partizione di 1. Si dimostri che

$$M_{\lambda \smallsetminus \mu} \simeq \bigoplus_{\nu \subset \lambda \text{ e } \nu \vdash n} M_\nu$$

(sugg. si usi il secondo esercizio della VIII settimana)

Esercizio 48. Si scriva una formula per i polinomi di Schur in una e due variabili.

Esercizio 49. Se n è un intero fissato e $ht(\lambda) \leqslant n$ abbiamo definito il polinomio di Schur S_λ in n variabili, che in questo esercizio indicheremo con $S_\lambda^{(n)}$ per sottolineare il fatto che si tratta del polinomio di Schur per n variabili. Siano ora $m, ht(\lambda) \leqslant n$. Dimostrare che

i) se $ht(\lambda) > m$ allora $S^{(n)}_\lambda(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = 0$;
ii) se $ht(\lambda) \leqslant m$ allora $S^{(n)}_\lambda(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = S^{(m)}(x_1, \dots, x_m)$.

Esercizio 50. (da libro di Etingof et al.) Sia λ una partizione di n e sia $c(\lambda) = \sum_{j=1}^{ht(\lambda)} \sum_{i=1}^{\lambda_j} (i - j)$. Sia consideri inoltre l'elemento T_n del centro di $\mathbb{C}[\mathsf{S}_n]$ dato da

$$T_n = \sum_{\tau \in \mathsf{S}_n \text{ trasposizione}} \tau.$$

Si dimostri che l'azione di T_n sulla rappresentazione M_λ è dato dalla moltiplicazione per $c(\lambda)$.

Esercizio 51. (da libro di Etingof et al.) Sia $E = (1, n) + (2, n) + \dots + (n-1, n) \in \mathbb{C}[\mathsf{S}_n]$. Si dimostri che l'azione di E su una qualsiasi rappresentazione irriducibile di S_n è diagonalizzabile e che gli autovalori sono compresi tra $1 - n$ e $n - 1$. (si noti che $E = T_n - T_{n-1}$)

Si mostri inoltre che l'azione di E su M_λ è un multiplo dell'identità se e solo se λ è un rettangolo.

10. Esercizi X settimana

Esercizio 52. Sia $\lambda = 7 \geqslant 3 \geqslant 1$ e $\mu = 5 \geqslant 5 \geqslant 1$. Calcolare la molteplicità di M_μ in $M_\lambda \otimes \mathbb{C}[\mathsf{S}_n]$. [preliminarmente capire come è fatta $V \otimes \mathbb{C}[G]$ per un qualsiasi gruppo finito G, per esempio calcolandone il carattere]

Esercizio 53. Sia $\mathbb{C}^n$ la rappresentazione naturale di S_n e sia V la sottorappresentazione dei punti $(x_1, \dots, x_n)$ con $\sum x_i = 0$. Si dimostri che se λ è la partizione $(n-r), 1^r$ allora $M_\lambda \simeq \Lambda^r V$. [Sugg: per induzione su r]

Esercizio 54. Sia $\lambda = 10 \geqslant 1$ e $\mu = 5 \geqslant 2 \geqslant 2 \geqslant 1 \geqslant 1$.

(1) decomporre $\mathbb{C}^n \otimes M_\mu$ [ricordarsi che $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} \mathbb{C}$ e usare che $V \otimes \mathrm{Ind}\, U = \mathrm{Ind}\, V \otimes U$]
(2) Calcolare la molteplicità di M_μ in $M_\lambda \otimes \mathbb{C}[\mathsf{S}_n]$.

Esercizio 55. Sia $E(t) = \prod_{i=1}^n (1 + t x_i)$ e sia $P(t) = \sum_{r \geqslant 1} p_r(x) t^{r-1}$.

i) Mostrare che $P(-t) = \frac{E'(t)}{E(t)}$;
ii) Ricavare dalla formula precedente

$$e_r = -\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} (-1)^i p_i e_{r-i}$$

dove $e_0 = 1$;

Esercizio 56. Si dimostri la seguente formula

$$\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(2i-1)!!\,(2n-2i+1)!!}{(2i-2)!!\,(2n-2i)!!}.$$

[Sugg: usare due diversi modi per calcolare la dimensione della rappresentazione associata alla partizione $n \geqslant n-1 \geqslant n-2 \geqslant \ldots \geqslant 1$]