

## 1. VALUTAZIONE

Mi è stato giustamente chiesto più volte come sarà organizzata la valutazione.

Per i dottorandi che seguono senza dover dare l'esame non c'è nessuna valutazione.

I dottorandi che seguono dovendo dare l'esame devono fare un seminario su un argomento da concordare e una prova scritta.

Per gli studenti della triennale o della magistrale. Devono fare una prova scritta e un colloquio orale.

Sia per i dottorandi che per gli studenti ci sono due modalità di prova scritta a seconda che si consegnino o meno gli esercizi durante l'anno.

Per chi non ha consegnato gli esercizi durante l'anno la prova scritta consiste in un compito da fare a fine corso.

Per chi intende consegnare gli esercizi, e qui viene la parte su cui sono stato più vago fino ad oggi, mi sono deciso per questa linea:

chi consegna almeno dieci esercizi durante il corso non deve sostenere nessun compito a fine anno. Questi esercizi possono essere consegnati con al massimo due settimane lavorative di ritardo (per intendersi quella dopo pasqua non conta e nemmeno quella ancora dopo perché ci sarà Gaiffi e non saprei come ritirarli, al mio rientro potranno quindi essere consegnati esercizi realativi sia alla terza settimana che alla quarta ma non alla seconda). A fine corso questi esercizi forniranno un giudizio di ammissione all'orale. Tale giudizio terrà conto (solo in senso migliorativo) anche di esercizi non consegnati ma svolti in classe.

Ogni settimana verranno segnalati tra gli esercizi proposti quelli che si possono consegnare. Se ne possono consegnare al massimo due per ogni settimana e si devono per forza consegnare due esercizi tra quelli assegnati l'ultima settimana, e quattro tra quelli delle ultime tre. Si può consegnare anche un esercizio in bianco (naturalmente non sarà valutato benissimo ma conta al fine di arrivare alla quota di dieci esercizi).

Si accettano controproposte peggiorative!

## 2. DIARIO APPROSSIMATIVO DELLE LEZIONI CORSO DI GRUPPI E RAPPRESENTAZIONI

### **Lezione 1; lunedì 4 marzo 2013, 2 ore.**

Gruppi algebrici affini e gruppi algebrici lineari, azioni regolari e rappresentazioni regolari, rappresentazioni razionali.

### **Lezione 2; martedì 5 marzo 2013, 2 ore.**

L'anello di coordinate è una rappresentazione regolare. Immersione di  $G$ -varietà affini in rappresentazioni.

### **Lezione 3; lunedì 11 marzo 2013, 2 ore.**

Rappresentazioni semiplici e semisemplici. Gruppi linearmente riduttivi. Decomposizione dell'anello di coordinate del gruppo. Lineare riduttività di  $GL$ ,  $SL$ ,  $SO$ ,  $Sp$ .

### **Lezione 4; martedì 12 marzo 2013, 2 ore.**

Integrali. Componente dell'identità nucleo e immagine di un morfismo di gruppi algebrici.

### **Lezione 5; lunedì 18 marzo 2013, 2 ore.**

Alcuni richiami di geometria algebrica, spazio tangente, campi di vettori.

### **Lezione 6; martedì 19 marzo 2013, 2 ore.**

Costruzione del quoziente  $G/H$ .

### **Lezione 7; lunedì 25 marzo 2013, 2 ore.**

Elementi unipotenti e elementi semisemplici. Decomposizione di Jordan.

### **Lezione 8; martedì 26 marzo 2013, 2 ore.**

Tori e gruppi unipotenti. Gruppi connessi di dimensione 1.

### **Lezione 9; lunedì 8 aprile 2013, 2 ore, Gaiffi.**

Sistemi di radici

### **Lezione 10; martedì 9 aprile 2013, 2 ore, Gaiffi.**

Sistemi di radici

**Lezione 11; lunedì 15 aprile 2013, 2 ore.**

Sottogruppi parabolici e sottogruppi di Borel. Teorema del punto fisso di Borel. (con qualche cambiamento, per questi argomenti, abbiamo grosso modo seguito il libro di Springer, sezione 6.2)

**Lezione 12; lunedì 22 aprile 2013, 2 ore.**

Tori massimali in gruppi risolubili connessi. (con qualche cambiamento, per questi argomenti, abbiamo seguito il libro di Springer, sezione 6.3)

**Lezione 13; martedì 23 aprile 2013, 2 ore.**

Tori massimali e elementi semisemplici in gruppi connessi. (per questi argomenti abbiamo seguito il libro di Springer, sezione 6.4)

**Lezione 14; lunedì 29 aprile 2013, 2 ore.**

Se  $G$  è connesso ogni elemento sta in un sottogruppo di Borel.

**Lezione 15; martedì 30 aprile 2013, 2 ore.**

Centralizzatori di tori in gruppi connessi, normalizzatore di un gruppo di Borel.

**Lezione 16; lunedì 6 maggio 2013, 2 ore.**

Gruppi riduttivi, sistema di radici associato ad un gruppo riduttivo.

**Lezione 17; martedì 7 maggio 2013, 2 ore.**

struttura dei gruppi riduttivi.

**Lezione 18; lunedì 13 maggio 2013, 2 ore.**

proprietà del sistema di radici associato ad un gruppo riduttivo.

**Lezione 19; martedì 14 maggio 2013, 1 ora.**

Sistemi di radici: classificazione.

**Lezione 20; lunedì 20 maggio 2013, 2 ore.**

Rappresentazioni di un gruppo riduttivo, prime osservazioni, osservazioni sulla rappresentazione aggiunta, sistemi positivi e sottogruppi di Borel.

**Lezione 21; martedì 21 maggio 2013, 2 ore.**

Fibrati vettoriali sulla varietà delle bandiere, rappresentazioni indotte

**Lezione 22; lunedì 27 maggio 2013, 2 ore.**

moduli irriducibili

**Lezione 23; martedì 28 maggio 2013, 2 ore.**

decomposizione di Bruhat,

**Lezione 24; lunedì 3 giugno 2013, 2 ore.**

fine della dimostrazione della decomposizione di Bruhat e fine della classificazione moduli irriducibili.

### 3. ESERCIZI I SETTIMANA

**Esercizio 1.** Siano  $X$  e  $Y$  due varietà affini. Sia  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo algebrico. Si dimostri che

- (1)  $f$  è una immersione chiusa se e solo se  $f^*$  è surgettiva;
- (2) se  $f$  è surgettiva allora  $f^*$  è iniettiva.

Si dia un esempio in cui  $f^*$  è iniettiva ma  $f$  non è suriettiva.

**Esercizio 2.** Si dimostri che  $Sp(2) = SL(2)$  e che  $SO(2)$  è isomorfo a  $GL(1)$ .

**Esercizio 3.** Si dimostri che il prodotto tensore di due rappresentazioni regolari è una rappresentazione regolare. (Come detto a lezione con rappresentazione regolare sottointendiamo rappresentazione regolare di dimensione finita, questa però non è una terminologia standard!)

**Esercizio 4.** Si dimostri che la somma diretta e il prodotto tensore di due rappresentazioni razionali e razionale. Cosa si può dire per il duale?

**Esercizio 5.** Il gruppo  $GL(1)$  si indica anche  $\mathbb{G}_m$ . Poiché noi lavoriamo sempre con varietà su un campo algebricamente chiuso e siamo portati a identificare una varietà con l'insieme dei suoi punti spesso questa notazione può sembrare innaturale e sarebbe preferibile scrivere  $\mathbb{k}^*$ .

Si descrivano tutte le rappresentazioni regolari unidimensionali del gruppo  $\mathbb{G}_m$ .

Si descriva una rappresentazione continua ma non algebrica di  $\mathbb{C}^*$ .

**Esercizio 6.** Quando si lavora su campi non algebricamente chiusi, o con schemi non ridotti, il punto di vista insiemistico presenta dei problemi. Con questa frase intendo che se uno vuole fare della geometria algebrica in questi casi il punto di vista che storicamente si è preferito prendere non è quello di pensare ad una varietà come al sottoinsieme di  $\mathbb{k}^n$  delle soluzioni di alcune equazioni polinomiali ma quello di pensare direttamente alle equazioni polinomiali. Per esempio l'anello  $\mathbb{R}[x]/x^2+1$  non è l'anello della varietà vuota ma di un'altra varietà. Per esempio dare un morfismo tra due varietà affini non è equivalente a dare un morfismo  $f$  tra i due sottoinsiemi di soluzioni delle equazioni polinomiali associate (che potrebbero anche essere vuoti) che verifica certe proprietà, ma è equivalente a dare un morfismo tra i loro anelli di coordinate.

Se si vuole lavorare in questa maggiore generalità possiamo definire un  $\mathbb{k}$ -schema in gruppi affini come il dato di una  $\mathbb{k}$ -algebra  $A$  e di tre mappe  $m^*, i^*, e^*$  che verificano i diagrammi duali di quelli che abbiamo scritto in classe per  $m, i, e$ .

Definire una struttura di gruppo con  $A = F_p[t]/t^p$ . QUI C'ERA UN 1 DI TROPPO.

Definire una struttura di gruppo con  $A = \mathbb{Z}[x, y]/(x^2 + y^2 = 1)$ .

In realtà anche questa definizione per molti scopi non è abbastanza generale. A seconda del successo di questo esercizio, forse ne darò un secondo su una ulteriore generalizzazione.

#### 4. ESERCIZI II SETTIMANA

**Esercizio 7.** Dimostrare che  $\mathbb{k}[G]$  con la struttura di  $G$  modulo indotta dalla moltiplicazione a destra di  $G$  su  $G$  è isomorfo a  $\mathbb{k}[G]$  con la struttura di  $G$  modulo indotta dalla moltiplicazione a sinistra di  $G$  su  $G$ .

**Esercizio 8.** Dimostrare che se  $G$  è linearmente riduttivo allora per ogni  $U$  rappresentazione razionale esiste ed è unica una proiezione  $G$  equivariante di  $U$  su  $U^G$ .

**Esercizio 9.** Una rappresentazione  $V$  si dice decomponibile se si può scrivere come somma diretta di due sottorappresentazioni diverse da zero. Altrimenti si dice indecomponibile. Fare un esempio di una rappresentazione di  $\mathbb{G}_a$  che sia indecomponibile ma non irriducibile. Mostrare che le rappresentazioni di  $\mathbb{G}_a^2$  di dimensione 2 indecomponibili sono classificate da  $\mathbb{k}\mathbb{P}^1$ , lo spazio proiettivo unidimensionale su  $\mathbb{k}$ .

**Esercizio 10.** Fare un esempio di una rappresentazione continua (ma non algebrica) di  $\mathbb{C}^*$  che non sia semisemplice.

**Esercizio 11.** Si consideri il gruppo  $G = \mathbb{k}^* \times \mathbb{k}$  con la struttura di gruppo data da  $(\lambda, a) \cdot (\mu, b) = (\lambda\mu, a + \lambda b)$ .

- (1) Dare una immersione di  $G$  in  $GL(2)$ ;
- (2) Dare un esempio di una rappresentazione  $U$  di  $G$  per la quale esistono infinite proiezioni  $G$  equivarianti di  $U$  su  $U^G$ .

**Esercizio 12.** Se  $U$  è una rappresentazione di  $G$  e  $V$  è una rappresentazione di  $H$  allora  $U \otimes V$  è una rappresentazione di  $G \times H$  dove l'azione è data da

$$(g, h) \cdot (u \otimes v) = gu \otimes hv.$$

- (1) Dimostrare che se  $U$  è una rappresentazione semplice di  $G$  e  $V$  è una rappresentazione semplice di  $H$  allora  $U \otimes V$  è una rappresentazione semplice di  $G \times H$
- (2) Se  $G$  e  $H$  sono due gruppi affini linearmente riduttivi dimostrare che  $G \times H$  è linearmente riduttivo e descrivere come costruire tutte le rappresentazioni semplici di  $G \times H$  a partire da quelle di  $G$  e quelle di  $H$ .

**Esercizio 13.** Dimostrare che se per ogni rappresentazione di dimensione finita  $U$  esiste una proiezione  $G$  equivariante di  $U$  su  $U^G$  allora  $G$  è linearmente riduttivo.

NOTA: gli esercizi 12 e 13 si possono consegnare. Vorrei che per ogni settimana tre persone consegnassero i due esercizi segnalati come consegnabili, con al massimo 15 giorni di ritardo rispetto la data di pubblicazione. Per esempio questi esercizi di oggi entro il 26 marzo. Per questi esercizi si può chiedere a chiunque, in particolare potete chiedere a me.

Inoltre ogni settimana cercheremo di ritagliare uno spazietto di almeno mezz'ora per la correzione degli esercizi in classe.

### 5. ESERCIZI III SETTIMANA

Se non specificato diversamente le varietà sono varietà su un campo algebricamente chiuso di car. 0 e i gruppi sono gruppi algebrici affini su un campo algebricamente chiuso di car. 0.

**Esercizio 14.** Sia  $\varphi : G \rightarrow H$  un morfismo suriettivo di gruppi algebrici. Dimostrare che  $\varphi$  è liscio.

**Esercizio 15.** Se  $H$  è un sottogruppo di  $G$  e  $X = G/H$  allora  $T_H X \simeq T_1 G / T_1 H$ .

**Esercizio 16.** Sia  $\mathcal{D}_G$  lo spazio vettoriale dei campi di vettori su  $G$ . Dimostrare che l'isomorfismo tra  $L(G)$  e  $T_{1_G} G$  si estende ad un isomorfismo

$$\mathcal{D}_G \simeq \mathbb{k}[G] \otimes T_{1_G} G.$$

come  $G$  moduli dove l'azione di  $G$  su  $\mathcal{D}_G$  è indotta dalla moltiplicazione a sinistra su  $G$ , l'azione di  $G$  su  $T_{1_G} G$  è banale e l'azione di  $G$  su  $\mathbb{k}[G]$  è indotta sempre dalla moltiplicazione a sinistra di  $G$  su  $G$ .

Su  $\mathcal{D}_G$  abbiamo una seconda azione di  $G$  indotta dalla moltiplicazione a destra su  $G$ .

- (1) dimostrare che  $L(G)$  è stabile per tale azione;
- (2) a quale azione su  $T_{1_G} G$  corrisponde questa azione di  $G$  su  $L(G)$ ?
- (3) esplicitare tali azioni per  $G = GL(n)$ .

**Esercizio 17.** Sia  $X$  una  $G$ -varietà affine. Dimostrare che  $\mathcal{D}_X$  è una rappresentazione razionale di  $G$ .

**Esercizio 18.** Calcolare  $T_1 G$  per  $G = SO(n)$  e  $G = Sp(2n)$  come sottospazi delle matrici. Calcolare le dimensioni di questi gruppi.

Dare dei generatori dell'ideale delle funzioni che svaniscono su  $SO(n)$  e  $Sp(2n)$  come sottovarietà dello spazio delle matrici.

**Esercizio 19.** Dimostrare che  $Sp(2n)$  è connesso.

**Esercizio 20.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $2n$ . Fissiamo una base  $e_1, \dots, e_{2n}$  e sia  $or = e_1 \wedge \dots \wedge e_{2n}$ .

Sia  $\omega \in \Lambda^2 V$ . Definiamo  $\text{Pf}(\omega)$  mediante la formula

$$\omega^{\wedge n} = \text{Pf}(\omega) or.$$

Mostrare che  $\text{Pf}(\omega)$  è una funzione polinomiale su  $\Lambda^2 V$ .

Similmente se  $A = (a_{ij})$  è una matrice antisimmetrica definiamo

$$\text{Pf}(A) = \text{Pf}\left(\sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j\right).$$

Dimostrare che  $\text{Pf}(A)^2 = \det(A)$  e che  $\text{Pf}(gAg^t) = \det(g) \text{Pf}(A)$ .

**Esercizio 21.** Sia  $H$  un sottogruppo algebrico di  $G$  e sia  $I$  l'ideale di  $A = \mathbb{k}[G]$  associato ad  $H$ . Abbiamo visto che  $T_1 H = \text{Der}_1(A/I, \mathbb{k}) \simeq \{\alpha \in \text{Der}_1(A, \mathbb{k}) : \alpha(I) = 0\} \subset T_1 G$ .

Questo ci permette di identificare  $L(H)$  con un sottospazio di  $L(G)$ . Dimostrare che secondo tale identificazione si ha

$$L(H) = \{\xi \in L(G) : \xi(I) \subset I\}.$$

**Esercizio 22.** Con le notazioni dell'esercizio precedente. Dimostrare che se  $H$  e  $K$  sono sottogruppi di  $G$  allora

$$L(H \cap K) = L(H) \cap L(K).$$

(questo fatto vale in car. 0. Io mi aspetterei che esista una dimostrazione che dice così, in car. 0 se  $J$  è un ideale dell'anello di coordinate di una varietà affine irriducibile  $X$  allora se  $\xi(J) \subset J$  allora  $\xi(\sqrt{J}) \subset \sqrt{J}$ . Non so se questa cosa sia vera, c'ho provato un poco ma non sono riuscito. Se qualcuno me la dimostra o mi fa vedere un controesempio sono molto contento. Questo renderebbe la dimostrazione più naturale.

Alternativamente si può procedere nel modo seguente.

- (1) se  $m : G \times G \rightarrow G$  è la moltiplicazione allora  $dm_{(1,1)} : T_1 G \oplus T_1 G \rightarrow T_1 G$  è la somma e analogamente il differenziale dell'inverso è l'opposto;
- (2)  $HK \subset G$  è un aperto della sua chiusura ed è liscio, se ne calcoli la dimensione e lo spazio tangente in 1;
- (3) si ricordi che  $HK/K \simeq H/H \cap K$  e si concluda la dimostrazione.)

**Esercizio 23.** Dimostrare che se  $H$  e  $K$  sono sottogruppi connessi di  $G$  allora  $H = K$  se e solo se  $L(H) = L(K)$ .

Siano  $G$  e  $H$  due gruppi algebrici e  $\varphi, \psi : G \rightarrow H$  due morfismi di gruppi algebrici. Sia  $G$  connesso. Dimostrare che  $\varphi = \psi$  se e solo se  $d_1\varphi = d_1\psi : T_1G \rightarrow T_1H$ .

NOTA: Possono essere consegnati due o tre tra gli esercizi dal 16 al 23. Però se si consegna il 23 allora si consegna anche il 22 e si consegna il 22 anche il 21.

### Teorema principale di Zariski.

**Teorema 1.** Sia  $\varphi : X \rightarrow Y$  un morfismo birazionale tra varietà irriducibili. Se  $\varphi$  è bigettivo e  $Y$  è normale allora  $\varphi$  è un isomorfismo.

Osservate che l'enunciato dato in classe è un poco più forte perché non richiede birazionale. In effetti in car. 0 è sempre vero che una  $\varphi$  bigettiva tra varietà irriducibili è anche birazionale.

Questa però mi sembra la parte dell'enunciato che è ragionevole dare per esercizio. Con qualche variante trovate la stessa successione di enunciati sullo Springer o sull'Harshorne da qualche parte negli esercizi.

Il punto fondamentale di un possibile approccio alla dimostrazione (ne esistono moltissime dimostrazioni) è dimostrare che perlomeno in qualche forma debole se un morfismo ha fibre finite allora è finito. Enunciato così questo fatto non può essere vero perché un morfismo finito è sempre chiuso mentre una immersione aperta, per esempio, ha sempre fibre finite.

*morfismi localmente finiti.*  $\varphi : X \rightarrow Y$  si dice localmente finito in un punto  $x$  se esiste un morfismo finito  $\psi : Z \rightarrow Y$ , un aperto  $V$  in  $Z$ , un intorno aperto  $U$  di  $x$  e un isomorfismo  $\alpha : U \rightarrow V$  tale che la restrizione  $\varphi_U$  di  $\varphi$  a  $U$  è uguale a  $\psi \circ \alpha$ .

**Lemma 2.** Se  $\psi : Y \rightarrow Z$ ,  $\varphi : X \rightarrow Y$ ,  $x \in X$  e  $y = \varphi(x)$  e  $\varphi$  localmente finito in  $x$  e  $\psi$  localmente finito in  $y$  allora la composizione è localmente finita in  $x$ .

**Lemma 3.** Siano ora  $A$  e  $B$  gli anelli di coordinate di  $X$  e  $Y$ . Supponiamo che sia  $B = A[b]$  e che  $\varphi^*$  corrisponde alla inclusione di  $A$  in  $A[b]$ . Allora se  $x \in X$  e  $y = \varphi(x)$  ci sono due possibilità: o  $\varphi^{-1}(y) \simeq \mathbb{A}^1$  oppure  $\varphi^{-1}(y)$  è finito e  $\varphi$  è localmente finito in  $x$ .

**Lemma 4.** Siano  $X$  e  $Y$  varietà affini irriducibili  $\varphi : X \rightarrow Y$  dominante (in particolare  $\varphi^*$  è iniettiva),  $x \in X$  e  $y = \varphi(x)$ . Se  $\varphi^{-1}(y)$  è finito allora  $\varphi$  è localmente finito in  $x$ .

Da questi tre lemmi, che non sono troppo complicati segue il teorema di Zariski nella forma enunciata prima. I dettagli eventualmente li potete trovare sul libro di Springer. In classe non diremo altro.

## 6. ESERCIZI IV SETTIMANA

**Esercizio 24.** Sia  $G$  un sottogruppo algebrico di  $GL(V)$  con  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia  $g \in G$ . Si dimostri che

- (1) se l'azione di  $g$  su  $V$  è unipotente allora l'azione di  $g$  su  $\mathbb{k}[G]$  è unipotente;
- (2) se l'azione di  $g$  su  $V$  è semisemplice allora l'azione di  $g$  su  $\mathbb{k}[G]$  è semisemplice.

(questo è stato dimostrato in una formulazione leggermente diversa all'interno di una dimostrazione fatta in classe. L'esercizio consiste nel ripercorrere quella dimostrazione nel caso di questa formulazione.)

**Esercizio 25.** Un toro massimale di un gruppo  $G$  è un sottogruppo di  $G$  che sia un toro e che non sia contenuto in modo proprio in nessun altro toro di  $G$ . Descrivere un toro massimale per i seguenti sottogruppi:

- (1)  $G = GL(n)$ ;
- (2)  $G = SL(n)$ ;
- (3)  $G = Sp(2n)$ ;
- (4)  $G = SO(2n)$  (scegliere la forma quadratica  $\sum_1^n x_i x_{i+n}$ );
- (5)  $G = SO(2n+1)$  (scegliere la forma quadratica  $x_0^2 + \sum_1^n x_i x_{i+n}$ ).

**Esercizio 26.** Sia  $K$  un gruppo algebrico e sia  $X$  una  $K$ -varietà. Un quoziente categorico di  $X$  per l'azione di  $K$  è un morfismo  $\pi : X \rightarrow Y$  tale che

- (1)  $\pi$  è  $K$  invariante, cioè  $\pi(gx) = \pi(x)$  per ogni  $g \in K$  e per ogni  $x \in X$ ;
- (2) per ogni  $\psi : X \rightarrow Z$  che sia  $K$  invariante esiste ed è unico  $\varphi : Y \rightarrow Z$  tale che  $\psi = \varphi \circ \pi$ .

Dimostrare che

- (1) se esiste il quoziente è unico a meno di isomorfismo;
- (2) se  $X = G$  è un gruppo algebrico e  $K = H$  è un sottogruppo algebrico di  $G$  consideriamo  $G$  come una  $H$  varietà rispetto all'azione data dalla moltiplicazione a destra di  $H$  su  $G$ .

**Esercizio 27.** Sia  $K$  un gruppo algebrico e sia  $X$  una  $K$ -varietà affine. Un quoziente categorico affine di  $X$  (è una definizione data per questo esercizio) per l'azione di  $K$  è un morfismo  $\pi : X \rightarrow Y$  con  $Y$  una varietà affine

- (1)  $\pi$  è  $K$  invariante, cioè  $\pi(gx) = \pi(x)$  per ogni  $g \in K$  e per ogni  $x \in X$ ;
- (2) per ogni  $\psi : X \rightarrow Z$  con  $Z$  affine che sia  $K$  invariante esiste ed è unico  $\varphi : Y \rightarrow Z$  tale che  $\psi = \varphi \circ \pi$ .

Si dimostri che se  $A$  è l'anello di coordinate di  $X$  e se  $A^K$  è una  $\mathbb{k}$ -algebra finitamente generata allora  $Y = \text{Spec } A^K$  (la varietà che ha come anello di coordinate  $A^K$ ) con  $\pi$  indotto dalla inclusione  $A^K \subset A$  è un quoziente categorico affine di  $X$ .

Si dia un esempio di una varietà  $X$  e di una azione di un gruppo  $K$  per il quale il quoziente categorico e il quoziente categorico affine non sono isomorfi. (si prenda  $X = GL(2)$  e  $K$  un opportuno sottogruppo)

**Esercizio 28.** Sia  $G$  un gruppo algebrico abeliano. Sia  $G_s$  l'insieme degli elementi semisemplici di  $G$  e  $G_u$  l'insieme degli elementi unipotenti. Si dimostri che  $G_s$  e  $G_u$  sono sottogruppi chiusi di  $G$  e che  $G = G_s \times G_u$ .

**Esercizio 29.** Sia  $G$  un gruppo algebrico unipotente e abeliano. Si dimostri (in caratteristica zero) che  $G$  è isomorfo a uno spazio vettoriale. (si dia un controesempio a questa affermazione in caratteristica positiva)

**Esercizio 30.** Sia  $T$  un toro e sia  $X$  il reticolo dei caratteri di  $X$  e  $Y$  il reticolo dei cocaratteri di  $X$ . Una varietà quasi torica affine per  $T$  è una  $T$ -varietà affine  $X$  che ha una orbita densa di  $T$ . Due varietà quasi toriche si dicono isomorfe se esiste un isomorfismo  $T$  equivariante tra le due varietà. Dimostrare che le varietà quasi toriche per  $T$  a meno di isomorfismo sono in corrispondenza con i sottomonoidi di  $X$ . (un sottomonoido è un sottoinsieme di  $X$  chiuso per la somma e contiene lo zero, ma non necessariamente chiuso per l'opposto)

**Esercizio 31.** In  $GL(n)$  dimostrare che una classe coniugata è chiusa se e solo se è fatta di elementi semisemplici.

Si possono consegnare il 25, il 27, il 28, il 29 e il 30.

## 7. ESERCIZI V SETTIMANA

**Esercizio 32.** Sia  $P$  un parabolico di  $G$  e sia  $G$  connesso. Sia  $\sigma : G \rightarrow G$  un automorfismo che sia l'identità su  $P$ . allora  $\sigma = id$ .

**Esercizio 33.** Trovare un sottogruppo  $\Gamma$  di  $SL(2, \mathbb{C})$  che sia risolubile ma che non sia triangolarizzabile (ovviamente  $\Gamma$  non sarà connesso)

**Esercizio 34.** Descrivere  $G/B$  per  $G = SO(2n+1)$  e  $G = Sp(2n)$ .

**Esercizio 35.** Come nell'esercizio precedente ma per  $G = SO(2n)$ .

**Esercizio 36.** Dimostrare che la mappa  $G \rightarrow G/H$  è una mappa affine.

**Esercizio 37.** Sia  $X$  la grassmanniana degli  $h$  spazi in  $\mathbb{V}^n$ . Si definisca  $p : X \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^h V)$  mediante  $p(W) = \Lambda^h W$ .  $p$  è iniettiva e indico la sua immagine con  $Y$ . In questo esercizio diamo una descrizione alternativa della mappa  $p$  e nel prossimo descriviamo le equazioni di  $Y$ .

Sia  $M$  l'insieme delle matrici  $n \times h$  di rango  $h$ . Per ogni  $I = 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_h \leq n$  e per ogni  $A$  in  $M$  si definisca  $p_I(A)$  come il determinante della matrice ottenuta da  $A$  scegliendo le righe corrispondenti a  $i_1 < i_2 < \dots < i_h$ .

Possiamo definire una mappa  $q : M \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^h V)$  mediante  $q(A) = [\sum_I p_I(A) e_I]$  dove  $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_h}$ .

Si osservi inoltre che  $X = M/GL(h)$  e che la mappa  $q$  passa al quoziente e che al quoziente è la mappa  $p$  introdotta in precedenza.

Tutti gli esercizi sono consegnabili.

## 8. ESERCIZI VI SETTIMANA

**Esercizio 38.** Sia  $G$  un gruppo connesso. Se tutti gli elementi di  $G$  sono semisemplici allora  $G$  è un toro. [Si consideri un Borel di  $G$ ]

**Esercizio 39.** Si dia un esempio di un gruppo connesso  $G$  e di un elemento semisemplice  $s$  di  $G$  tale che  $Z_G(s)$  non è connesso. [provare con  $G = SO(3)$ ].

**Esercizio 40.** Sia  $T$  il sottogruppo delle matrici diagonali di  $GL(n)$ . Si dimostri che  $GL(n)/T$  è affine. [Una possibilità è descrivere il quoziente come un aperto affine di  $(\mathbb{P}^{n-1})^n$ .]

**Esercizio 41.** Questo esercizio è il continuo dell'ultimo esercizio della settimana passata. In  $\mathbb{P}(\Lambda^h V)$  introduciamo coordinate omogenee  $x_I$  relative alla base  $e_I$  introdotta nella volta scorsa.

Sulle insiemi delle  $h$ -uple  $I$  (come nell'esercizio precedente) possiamo introdurre un ordine totale  $\leq_t$ , dato dall'ordine lexicografico, e un ordine parziale  $\leq$  dato da  $I \leq J$  se  $i_s \leq j_s$  per ogni  $s$ .

Sia  $I \leq_t J$  ma non sia  $I \leq J$  e sia  $s$  il più piccolo indice tale che  $i_s > j_s$ . Sia  $A = i_1 < \dots < i_{s-1}$ , sia  $B = i_s < \dots < i_h$  sia  $C = j_1 < \dots < j_s$  e  $D = j_{s+1} < \dots < j_h$ .

Consideriamo il polinomio

$$R_{IJ} = \sum \varepsilon(E, F) x_{AE} x_{FD}$$

dove la somma è su tutte le coppie di insiemi ordinati di indici  $E$  ed  $F$  di cardinalità rispettivamente  $s$  e  $h-s+1$  tali che  $E \cup F = B \cup C$  e  $\varepsilon(E, F)$  è il segno della permutazione di  $B \cup C$  che riordina l'insieme di indici ottenuto mettendo  $F$  dopo  $E$  in modo crescente. Si dimostri che  $R_{IJ} \equiv 0$  su  $Y$ .

**Esercizio 42.** Si dimostri che l'insieme dove si annullano tutti i polinomi  $R_{IJ}$  come nell'esercizio precedente è  $Y$ .

Tutti gli esercizi sono consegnabili.

## 9. ESERCIZI VII SETTIMANA

**Esercizio 43.** Sia  $G$  un gruppo connesso e sia  $g = su$  la decomposizione di Jordan di un elemento  $g$  di  $G$ . Si dimostri che  $g$  è nella componente connessa dell'identità di  $Z_G(s)$ . [procedere come nella dimostrazione che un gruppo unipotente è connesso considerando gli elementi della forma  $su^n$ .]

**Esercizio 44.** Sia  $G$  connesso e sia  $P$  un parabolici di  $G$ . Dimostrare che  $N_G(P) = P$ .

**Esercizio 45.** Sia  $G$  connesso e siano  $P$  e  $Q$  due sottogruppi parabolici coniugati. Se  $P \cap Q$  è un sottogruppo parabolico allora  $P = Q$ .

**Esercizio 46.** Sia  $G$  connesso e sia  $T$  un toro massimale di  $G$ . Dimostrare che esiste una bigezione tra  $N_G(T)/Z_G(T)$  e l'insieme dei sottogruppi di Borel di  $G$  contenenti  $T$ .

**Esercizio 47.** Si classifichino tutti i gruppi risolubili connessi di dimensione 2 con dimensione della parte unipotente uguale a 1.

**Esercizio 48.** Sia  $G = GL(n)$  e  $T$  il sottogruppo delle matrici diagonali. Descrivere esplicitamente tutti i sottogruppi di Borel di  $G$  che contengono  $T$ .

**Esercizio 49.** Sia  $G = GL(n)$  descrivere il centralizzatore di un elemento semisemplice, descrivere il centralizzatore di un elemento unipotente.

**Esercizio 50.** Sia  $G$  nilpotente e connesso, allora  $G_s$  è un sottogruppo chiuso connesso e centrale di  $G$  e  $G = G_s \times G_u$ .

Tutti gli esercizi sono consegnabili.

## 10. ESERCIZI VIII SETTIMANA

**Esercizio 51.** Calcolare il reticolo dei pesi  $X^*(T)$  e il sistema di radici  $\Phi$  associato a  $SO(2n)$ .

Sia  $X$  una  $G$  varietà e sia  $\pi : L \rightarrow X$  un fibrato lineare su  $X$ . Una  $G$ -linearizzazione di  $L$  è un'azione di  $G$  su  $L$  che commuta con la proiezione  $\pi$  e tale che l'azione sulle fibre è lineare. Un fibrato lineare con una linearizzazione assegnata si dice un  $G$ -fibrato lineare. I morfismi tra  $G$ -fibrati lineari sono i morfismi di fibrati lineari che commutano con l'azione di  $G$ .  $\text{Pic}_G(X)$  ha una struttura di gruppo data dal prodotto tensore di fibrati lineari.

Sia  $\text{Pic}_G(X)$  l'insieme dei  $G$  fibrati lineari a meno di isomorfismo. Dimenticando l'azione abbiamo una mappa naturale  $\text{Pic}_G(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ .

**Esercizio 52.** Sia  $H$  parabolico e sia  $X = G/H$ . Dimostrare che il nucleo di  $\text{Pic}_G(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$  è isomorfo a  $X^*(G)$  l'insieme dei caratteri  $G$ .

**Esercizio 53.** Sia  $X = G/H$  e sia  $x_0 = H \in G/H$ . Supponiamo che esista un sottogruppo  $K$  di  $G$  tale che  $HK$  è denso in  $G$  e tale che  $H \cap K = \{1\}$ .

Dato un  $G$  fibrato lineare  $L$  su  $X$ , possiamo considerare la sua fibra in  $L_0$ . Su tale fibra agisce  $H$  e in particolare possiamo definire un carattere di  $H$  dato dall'azione di  $H$  su  $L_0$ .

Dimostrare che la mappa  $\text{Pic}_G(X) \rightarrow X^*(H)$  così costruita è un isomorfismo.

(in realtà l'esistenza di  $K$  non è necessaria per questo risultato ma l'unica dimostrazione generale che conosco è piuttosto complicata.)

**Esercizio 54.** Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente descrivere tutti i  $GL(n)$ -fibrati lineari sulla varietà delle bandiere (ovvero  $G/B$  con  $G = GL(n)$ ).

**Esercizio 55.** Descrivere tutti i fibrati lineari di  $\mathbb{P}^1$  che hanno una  $SL(2)$  linearizzazione e quelli che hanno una  $PSL(2)$  linearizzazione.

Tutti gli esercizi sono consegnabili.

## 11. ESERCIZI IX SETTIMANA

NOTA: La definizione di sistema di radici usata da Gaiffi è leggermente diversa da quella che abbiamo usato noi. Lui ha richiesto che  $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle$  sia intero per ogni  $\alpha, \beta$  in  $\Phi$  e non ha richiesto che  $\Phi$  sia contenuto in un reticolo. Nel nostro caso questa proprietà è ovvia perché sono elementi in reticoli duali.

**Esercizio 56.** Sia  $\Phi$  un sistema di radici e sia  $B \subset \Phi$  un sottoinsieme con le seguenti proprietà:

- (1) per ogni  $\alpha \in \Phi$  l'intersezione  $B \cap \{\pm\alpha\}$  ha cardinalità uno;
- (2) per ogni  $\alpha, \beta \in B$  se  $\alpha + \beta \in \Phi$  allora  $\alpha + \beta \in B$ .

Dimostrare che  $B$  è un sistema positivo.

**Esercizio 57.** Sia  $PGL(n) = GL(n)/\mathbb{k}^* Id$ . Calcolare il dato combinatorico (reticoli e sistemi di radici) associato a  $PGL(n)$ .

**Esercizio 58.** Quale è il duale di Langlands di  $GL(n)$ ? e di  $SL(n)$ ?

**Esercizio 59.** Quale è il duale di Langlands di  $SO(2n+1)$ ?

**Esercizio 60.** Sia  $G$  riduttivo connesso. Si dimostri che  $G$  è semisemplice se e solo se  $\Phi$  genera  $\Lambda_{\mathbb{R}} = X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ .

**Esercizio 61.** Sia  $G$  semisemplice e aggiunto (ovvero  $X^*(T)$  è il reticolo generato da  $\Phi$ ). Si dimostri che  $Z(G) = 1$ .

**Esercizio 62.** Sia  $\varphi: T \rightarrow S$  un morfismo di tori. Sia  $A$  il reticolo dei caratteri di  $T$  e  $B$  quello di  $S$  e sia  $\varphi^*: B \rightarrow A$  il morfismo di reticoli indotto dalla composizione con  $\varphi$ .

Si dimostri che  $\ker \varphi \simeq (A/\text{Im}(\varphi^*))^* = \text{Hom}(A/\text{Im}(\varphi^*), \mathbb{k}^*)$

(enunciato così questa affermazione vale in car. 0. In car.  $p$  va enunciata così: Sia  $N$  il nucleo e sia  $C$  il gruppo abeliano  $A/\text{Im}(\varphi^*)$  allora l'anello di coordinate di  $N$  è  $\mathbb{k}[C]$ .)

**Esercizio 63.** Sia  $G$  riduttivo e connesso. Sia  $Z \subset G$  un sottogruppo normale e finito di  $G$ . Si dimostri che  $Z$  è centrale e che  $G/Z$  è riduttivo.

**Esercizio 64.** Sia  $G$  riduttivo e connesso. Sia  $Z \subset G$  un sottogruppo normale e finito di  $G$ . Si descriva il dato combinatorico associato a  $G/Z$  in termine del datocombinatorio associato a  $G$ .

## 12. ESERCIZI X SETTIMANA

**Esercizio 65.** Sia  $V = \mathbb{k}^2$  la rappresentazione naturale di  $G = SL(2, \mathbb{k})$ . Dimostrare che se la caratteristica di  $\mathbb{k}$  è zero o maggiore di tre allora le rappresentazioni  $S^i V$  per  $i = 0, 1, 2, 3$  sono irriducibili.

**Esercizio 66.** Sia  $G$  semisemplice e connesso. Dimostrare che le uniche funzioni invertibili su  $G$  sono le costanti non nulle.

**Esercizio 67.** Sia  $G$  connesso, dimostrare che  $\mathbb{k}[G]^* = \mathbb{k}^* \cdot X^*(G)$ .



**Esercizio 68.** Sia  $X$  una  $G$  varietà connessa e sia  $G$  connesso. Usando l'esercizio precedente dimostrare che ogni  $G$  struttura sul fibrato banale  $L = X \times \mathbb{k}$  è indotta dall'azione mediante un carattere di  $G$ . Ovvero ogni  $G$  struttura su  $L$  è isomorfa a una della forma

$$g(x, z) = (gx, \chi(g)z)$$

per qualche carattere  $\chi$  di  $G$ .

**Esercizio 69.** Sia  $G = SL(2, \mathbb{k})$  e sia  $T$  il sottogruppo delle matrici diagonali  $B$  il sottogruppo delle matrici triangolari superiori.

- (1) Calcolare  $\dim \Gamma(G/B, L_\lambda)$  per ogni  $\lambda \in X^*(T)$ ;
- (2) Calcolare  $\dim H^1(G/B, L_\lambda)$  per ogni  $\lambda \in X^*(T)$ ;
- (3) Calcolare  $ch \Gamma(G/B, L_\lambda)$ .

**Esercizio 70.** Sia  $G$  riduttivo connesso. Sia  $V$  una rappresentazione di  $G$  e consideriamo la sua restrizione a  $B$  sottogruppo di Borel di  $G$ . Allora

$$G \times_B V \simeq G/B \times V$$

**Esercizio 71.** Siano  $U$  e  $V$  due rappresentazioni di  $B$  sottogruppo di Borel di un gruppo riduttivo connesso  $G$  sia  $H = \text{Hom}(U, V)$  Sia  $\mathcal{U} = G \times_B U$ ,  $\mathcal{V} = G \times_B V$  e  $\mathcal{H} = G \times_B H$ . Allora

- (1) Lo spazio degli omomorfismi di fibrati vettoriali da  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{V}$  è isomorfo alle sezioni di  $\mathcal{H}$ ;
- (2) Lo spazio degli omomorfismi di  $G$ -fibrati vettoriali da  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{V}$  è isomorfo a  $\text{Hom}_B(U, V)$ .

**Esercizio 72.** Sia  $G$  un gruppo algebrico e sia  $H = G/R_u(G)$  e  $\pi : G \rightarrow H$  la proiezione. Se  $\rho : H \rightarrow GL(V)$  è una rappresentazione di  $H$  possiamo considerare la rappresentazione  $\pi^*(V)$  data da  $\rho \circ \pi$ . Dimostrare che ogni rappresentazione irriducibile di  $G$  è di questa forma. (questo mostra che per studiare le rappresentazioni irriducibili basta studiare il caso riduttivo).

### 13. ESERCIZI XI SETTIMANA

**Esercizio 73.** Sia  $G = SL(n)$  e sia  $B$  l'insieme delle matrici triangolari superiori in  $G$  e  $T$  delle matrici diagonali in  $G$ . Si identifichi  $G/B$  con lo spazio delle bandiere in  $\mathbb{k}^n$ . Sia  $e_1, \dots, e_n$  la base standard di  $\mathbb{k}^n$  e sia  $E_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$ . Si dimostri che una bandiera  $0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = \mathbb{k}^n$  è in  $S_w$  se e solo se per  $i = 1, \dots, n$  si ha

$$\min\{j : \dim(F_i \cap E_j) > \dim(F_{i-1} \cap E_j)\} = w(i).$$

**Esercizio 74.** Sia  $w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_m}$  una espressione ridotta di  $w$ . Allora

$$U_w^{-1}w = U_{\alpha_1} s_{\alpha_1} U_{\alpha_2} s_{\alpha_2} \dots U_{\alpha_m} s_{\alpha_m}.$$

**Esercizio 75.** Per  $w \in W$  sia  $C(w) = BwB$ . Si dimostri che se  $s = s_\alpha$  è la riflessione associata ad una radice semplice allora

$$C(s) \cdot C(s) = C(s) \cup C(e).$$

[Ci riduca al caso di  $SL(2)$ .]

**Esercizio 76.** Sia  $G$  riduttivo semplicemente connesso e sia  $I \subset \Delta$  un sottoinsieme delle radici semplici associate alla scelta di un toro massimale di un sottogruppo di Borel. Sia  $L$  il sottogruppo generato da  $U_\alpha$  e  $U_{-\alpha}$  con  $\alpha \in I$ . Si dimostri che  $G$  è riduttivo connesso e semplicemente connesso.

**Esercizio 77.** Sia  $\mathbb{k}$  la chiusura algebrica di  $\mathbb{F}_2$ ,  $G = SL(2, \mathbb{k})$ ,  $B$  le matrici triangolari superiori e  $T$  le matrici diagonali in  $G$ . Sia  $\omega$  l'usuale carattere di  $X^*(T)$ . Dimostrare che  $L_{-2^m \omega} = \{x^{2^m}, y^{2^m}\}$ . Sia  $m = \sum_i a_i 2^i$  la scrittura in numeri binari di  $m$  e sia  $I = \{i : a_i = 1\}$ . Dimostrare che

$$L_{-m\omega} \simeq \otimes_{i \in I} L_{-2^i \omega}.$$

**Esercizio 78.** Si dimostri che la funzione  $f_\lambda = f$  costruita nella dimostrazione del teorema "  $\lambda$  antidominate implica  $\Gamma_\lambda \neq 0$ " è  $U^-$  invariante.

**Esercizio 79.** Sia  $G$  riduttivo e semplicemente connesso. Sia  $G \supset B \subset T$  la scelta di un sottogruppo di Borel di  $G$ . Sia  $\Delta$  l'insieme di radici semplici e per  $\alpha \in \Delta$  sia  $\omega_\alpha$  il carattere di  $T$  tale che  $\langle \omega_\alpha, \beta^\vee \rangle = \delta_{\alpha, \beta}$  per ogni  $\beta \in \Delta$ . Sia inoltre  $f = f_{-\omega_\alpha}$  (vedi il testo dell'esercizio precedente). Si dimostri che

$$\text{Zeri}(f_{\omega_\alpha}) = \overline{U^- x_{s_\alpha}}.$$

**Esercizio 80.** Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente si dimostri che se  $G$  è riduttivo semplicemente connesso allora  $\mathbb{k}[G]$  è un anello a fattorizzazione unica.

**Esercizio 81.** Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente il precedente si dimostri che se  $G$  è riduttivo semplicemente connesso allora ogni fibrato lineare su  $G/B$  è linearizzabile.